内 容 提 要

本书是作者在长期教学实践基础上，参考国内外大量相关教材、专著、文献并吸纳个人一些科研成果编写而成。

本书共分 8 章。第 1 章多项式理论，第 2 章行列式的计算方法和技巧，第 3 章线性方程组，第 4 章矩阵，第 5 章向量空间，第 6 章线性变换，第 7 章欧氏空间，第 8 章二次型。本书全面系统地归纳总结了高等代数的基本理论和基本方法，便于读者复习和提高。书中有较多的例题说明抽象的理论，有相当丰富的习题培养读者的能力，且易于将读者带入研究领域。本书可作为高等院校数学系高年级学生教材，也可作为考研学生的复习参考资料，也可供数学教师和科研人员参考。

本书第 2，3，4 章由齐齐哈尔大学数学系副教授吴险峰编写；第 5，6 章由齐齐哈尔大学数学系讲师李立编写；第 7，8 章由齐齐哈尔师范高等专科学校高级讲师张世红编写，第 1 章由 3 个人共同编写。

作者

2006 年 7 月

目　录

第 1 章　多项式理论

多项式理论是高等代数的重要内容，是中学数学有关知识的加深和扩充. 多项式理论中的一些重要定理和方法，在进一步学习数学理论和解决实际问题时经常用到，是学习代数学及其它数学分支的必要基础. 多项式理论既相互独立，又贯穿于高等代数的其它章节. 换言之，多项式理论不依赖于高等代数的其它内容而自成体系，又为高等代数的其它章节提供范例和理论依据. 学习本章时，要正确地掌握概念，学会严谨地推导和计算.

1.1　内容提要

1.1.1　数域

1. 设 M 是一个非空数集，若 M 中任意两个数作某一运算的结果仍在 M 中，则称 M 对于该种运算是封闭的.

2. 设 S 是一个非空数集，若对于 $\forall a,b\in S$，都有 $a+b,a-b,ab\in S$，即 S 对于加法、减法、乘法封闭，则 S 称为一个**数环**.

零数环 $\{0\}$ 是惟一的有限数环，两个数环的交仍是数环.

3. 设 F 是含有 1 的数环，对于 $\forall a,b\in F$，当 $b\neq 0$ 时，有 $\frac{a}{b}\in F$，则 F 称为一个**数域**.

(1) 显然，数域都是无限集合，且两个数域的交仍是数域.

(2) 任何数域都包含有理数域 Q，即有理数域 Q 是最小的数域.

(3) 存在无穷多个互异的数域.

(4) 在有理数域 Q 与实数域 R 之间存在无穷多个数域；在实数域 R 与复数域 C 之间不存在其它数域.

1.1.2　一元多项式代数

1. 定义

形式表达式

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

称为数域 F 上文字 x 的**一元多项式**,其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n\in F$,n 是非负整数. 当 $a_n\neq 0$ 时,称多项式 $f(x)$ 的次数为 n,记为 $\partial^\circ(f(x))=n$(或 $\deg(f(x))=n$),并称 a_nx^n 为 $f(x)$ 的首项,a_n 为 $f(x)$ 的首项系数. a_ix^i 称为 $f(x)$ 的 i 次项,a_i 称为 $f(x)$ 的 i 次项系数. 当 $a_n=\cdots=a_1=0$,$a_0\neq 0$ 时,称多项式 $f(x)$ 为**零次多项式**,即 $\partial^\circ(f(x))=0$;当 $a_n=\cdots=a_1=a_0=0$ 时,称 $f(x)$ 为**零多项式**,零多项式是惟一不定义次数的多项式.

2. 运算及运算法则

多项式可以进行加、减、乘运算,并有与整数相类似的性质.

3. 多项式的次数定理

多项式的次数有下列性质(设多项式 $f(x)\neq 0,g(x)\neq 0$):

(1) 当 $f(x)\pm g(x)\neq 0$ 时,

$$\partial^\circ(f(x)\pm g(x))\leqslant\max\{\partial^\circ(f(x)),\partial^\circ(g(x))\}.$$

(2) $\partial^\circ(f(x)g(x))=\partial^\circ(f(x))+\partial^\circ(g(x))$.

所有系数在数域 F 中的一元多项式的全体记为 $F[x]$,称为数域 F 上的一元多项式环;数域 F 上一切次数小于 n 的多项式,再添上零多项式的全体,记为 $F_n[x]$.

1.1.3 多项式的带余除法和整除性

1. 多项式的带余除法

带余除法定理 设 $f(x),g(x)\in F[x]$,$g(x)\neq 0$,则存在惟一的多项式 $q(x),r(x)\in F[x]$,使

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x).$$

其中 $r(x)=0$ 或 $\partial^\circ(r(x))<\partial^\circ(g(x))$. 称上式中 $q(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的商式,$r(x)$ 为 $g(x)$ 除 $f(x)$ 的**余式**.

2. 整除

设 $f(x),g(x)\in F[x]$,如果存在多项式 $h(x)\in F[x]$,使

$$f(x)=h(x)g(x),$$

则称 $g(x)$ **整除** $f(x)$(或 $f(x)$ 能被 $g(x)$ 整除),记为 $g(x)\mid f(x)$,此时

称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的**因式**,$f(x)$ 为 $g(x)$ 的**倍式**,商式 $h(x)$ 也可记为 $\frac{f(x)}{g(x)}$,即 $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$. 用 $g(x)\nmid f(x)$ 表示 $g(x)$ **不能整除** $f(x)$,就是不存在 $h(x)$,使 $f(x)=h(x)g(x)$ 成立.

注　$F[x]$ 中的多项式不能作除法,而整除性不是多项式的运算,而是 $F[x]$ 中元素间的一种关系,即任给 $F[x]$ 中两个多项式 $f(x)$, $g(x)$,可以判断 $g(x)$ 整除 $f(x)$ 或 $g(x)$ 不能整除 $f(x)$.

3. 整除的有关结论

(1) 如果 $g(x)\neq 0$,则 $g(x)\mid f(x)$ 的充分必要条件是用 $g(x)$ 除 $f(x)$ 所得的余式 $r(x)=0$.

(2) 零多项式只能整除零多项式;任意多项式一定能整除它自身;任意多项式都可以整除零多项式;零次多项式(非零常数)能整除任意多项式.

(3) 多项式 $f(x)$ 与 $cf(x)(c\neq 0)$ 有相同的因式和倍式.

(4) 两个多项式之间的整除关系不因系数域的扩大而改变.

4. 整除的性质

(1) 如果 $g(x)\mid f(x)$,则 $kg(x)\mid lf(x)$,其中 k 为非零常数,l 为常数.

(2) 如果 $f(x)\mid g(x)$, $g(x)\mid h(x)$,则 $f(x)\mid h(x)$.

(3) 如果 $f(x)\mid g_i(x)$,又 $u_i(x)$ 为任意多项式,$i=1,2,\cdots,m$,则 $f(x)\mid[u_1(x)g_1(x)+u_2(x)g_2(x)+\cdots+u_m(x)g_m(x)]$.

(4) 如果 $f(x)\mid g(x)$, $g(x)\mid f(x)$,则 $f(x)=cg(x)$,其中 c 为非零常数.

5. 带余除法的计算格式

用多项式 $g(x)(\neq 0)$ 除多项式 $f(x)$ 所得的商式 $q(x)$ 和余式 $r(x)$ 可以通过如下两种格式进行:

(1) 普通除法或长除法

$$
\begin{array}{r}
\text{商式 } q(x) \\
\text{除式 } g(x)\ \overline{)\ \text{被除式 } f(x)} \\
\underline{-\,q(x)g(x)} \\
\text{余式 } r(x)
\end{array}
$$

(2)竖式除法

$$\begin{array}{r|l|l} \text{除式 } g(x) & \text{被除式 } f(x) & \text{商式 } q(x) \\ & -q(x)g(x) & \\ \hline & \text{余式 } r(x) & \end{array}$$

或

$$\begin{array}{r|l|l} \text{商式 } q(x) & \text{被除式 } f(x) & \text{除式 } g(x) \\ & -q(x)g(x) & \\ \hline & \text{余式 } r(x) & \end{array}$$

注 1　在利用以上两种格式进行计算时,要逐步利用除式 $g(x)$ 确定商式 $q(x)$ 中由高次到低次的项来消去被除式的首项,以得到次数低于 $g(x)$ 的多项式或零多项式 $r(x)$.

注 2　当利用辗转相除法求两个多项式的最大公因式时,用竖式除法较为方便.

6. 综合除法

(1)设以 $g(x) = x - a$ 除 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 时,所得的商式 $q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1x + b_0$ 及余式 $r(x) = c_0$,则比较 $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ 两端同次幂的系数得

$$b_{n-1} = a_n, b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}, \cdots, b_0 = a_1 + ab_1, c_0 = a_0 + ab_0.$$

这种计算可以排成以下格式进行:

$$\begin{array}{c|cccccc} a & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & a_0 \\ & & ab_{n-1} & ab_{n-2} & & ab_1 & ab_0 \\ \hline & b_{n-1}(=a_n) & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & c_0 \end{array}$$

用这种方法求商式和余式(的系数)称为**综合除法**.

注 1　用综合除法进行计算时,被除式中所缺的项必须补上 0,否则计算就错了.

注 2　当除式为 $ax + b(ab \neq 0)$ 时,因为

$$f(x) = (ax + b)q(x) + r(x) = \left(x + \frac{b}{a}\right)[aq(x)] + r(x),$$

所以用 $ax + b$ 除 $f(x)$ 可以先用 $x - \left(-\frac{b}{a}\right)$ 除 $f(x)$,得到商式的 a 倍和余式,再用 a 除商式的 a 倍得到商式.

注3　当除式为一次式时,用综合除法比用带余除法来得方便,特别是有些问题需要多次用一次多项式作为除式的运算,综合除法更显示出它的优越性.

(2)综合除法的应用

①求 $x=c$ 时 $f(x)$ 的值,并判定 c 是否为 $f(x)$ 的根及其几重根.

②把 $f(x)$ 表成 $x-c$ 的多项式.

1.1.4　多项式的最大公因式与互素多项式

1. 多项式的最大公因式

(1)设 $f(x),g(x)\in F[x]$,如果 $d(x)\in F[x]$,满足 $d(x)\mid f(x)$,$d(x)\mid g(x)$,则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个公因式;又如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的任意一公因式都能整除 $d(x)$,则称 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个**最大公因式**.

(2)最大公因式有以下性质:

①最大公因式存在惟一性定理:$F[x]$ 中任意两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 一定有最大公因式. 两个零多项式的最大公因式是零多项式,它是惟一确定的. 两个不全为零的多项式的最大公因式总是非零多项式,它们之间只有常数因子的差别;这时,首项系数为1的最大公因式记为 $(f(x),g(x))$.

②设 $f(x),g(x)\in F[x],g(x)\neq 0$,如果有

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x),$$

则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式一定是 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的最大公因式,而 $g(x)$ 与 $r(x)$ 的最大公因式也一定是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式. 特别地,有

$$(f(x),g(x))=(g(x),r(x)).$$

(这也是用辗转相除法求最大公因式的根据)

③最大公因式表示定理:设 $f(x),g(x)\in F[x]$,如果 $d(x)\in F[x]$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式,则必有 $u(x),v(x)\in F[x]$,使

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x).$$

注　如果 $f(x),g(x),d(x)\in F[x]$,且有等式 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$ 成立,但 $d(x)$ 不一定是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式. 如取

$f(x)=x,g(x)=x+1,u(x)=x+2,v(x)=x-1,d(x)=2x^2+2x-1$，则有 $d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$，但 $d(x)$ 显然不是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式.

④最大公因式不因数域 F 的扩大而改变.

(3)求最大公因式的辗转相除法：

如果 $f(x),g(x)\in F[x],g(x)\neq 0$，且有 $q_i(x),r_i(x)\in F[x]$，使

$$f(x)=q_1(x)g(x)+r_1(x),$$
$$g(x)=q_2(x)r_1(x)+r_2(x),$$
$$r_1(x)=q_3(x)r_2(x)+r_3(x),$$
$$\cdots\cdots$$
$$r_{s-2}(x)=q_s(x)r_{s-1}(x)+r_s(x),$$
$$r_{s-1}(x)=q_{s+1}(x)r_s(x)+0.$$

其中 $\partial^\circ(r_i(x))\geqslant 0$，则 $r_s(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式.

注　如果能够对多项式进行因式分解，则用因式分解法求多项式的最大公因式要比用辗转相除法求最大公因式简便一些. 但遗憾的是，没有一个一般的方法对多项式进行因式分解. 因此，因式分解法求最大公因式主要具有理论上的用处，它不能代替可以具体求出最大公因式的辗转相除法.

2. 互素多项式

(1)如果 $f(x),g(x)\in F[x]$ 的最大公因式为非零常数，或 $(f(x),g(x))=1$，则称 $f(x)$ 与 $g(x)$ **互素或互质**.

(2)互素的性质

①设 $f(x),g(x)\in F[x]$，$f(x)$ 与 $g(x)$ 互素的充分必要条件是，存在 $u(x),v(x)\in F[x]$ 使

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=1.$$

②如果 $(f(x),g(x))=1$ 且 $f(x)\mid[g(x)h(x)]$，则 $f(x)\mid h(x)$.

③如果 $(f(x),g(x))=1$，且 $f(x)\mid h(x),g(x)\mid h(x)$，则 $[f(x)g(x)]\mid h(x)$.

④如果 $(f(x),g(x))=1$，$(f(x),h(x))=1$，则 $(f(x),g(x)h(x))=1$.

1.1.5　不可约多项式与因式分解惟一性定理

1. 不可约多项式及其性质

(1)如果数域F上次数大于零的多项式$p(x)$不能表示成数域F上两个次数比它低的多项式的乘积,则称$p(x)$是数域F上的**不可约多项式**.

注1　零多项式与零次多项式既不能说是可约的,也不能说是不可约的. 一次多项式总是不可约的.

注2　多项式的可约性与多项式所在的数域密切相关,如x^2-3在有理数域Q上不可约,而在实数域R上可约,即$x^2-3=(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$;又如$x^2+1$在实数域R上不可约,而在复数域C上可约,即$x^2+1=(x+i)(x-i)$.

注3　互素多项式指的是$F[x]$中两个多项式之间的一种关系,而不可约多项式是某个多项式本身的一种特性,这是完全不同的两个概念. 但在讨论问题时,互素多项式与不可约多项式的性质又是互相利用的,要学会灵活运用.

(2)不可约多项式的性质

①如果$p(x)$是数域F上的不可约多项式,则$cp(x)$也是F上的不可约多项式,其中c是F中的非零数.

②设$p(x)$是数域F上一个不可约多项式,则对F上任意多项式$f(x)$,必有$(p(x),f(x))=1$,或者$p(x)\mid f(x)$.

③设$p(x)$是数域F上的不可约多项式,$f(x)$,$g(x)$是F上的任意两个多项式,如果$p(x)\mid f(x)g(x)$,则必有$p(x)\mid f(x)$或者$p(x)\mid g(x)$.

④如果不可约多项式$p(x)$整除$f_1(x)f_2(x)\cdots f_s(x)$,其中$s\geqslant 2$,则$p(x)$至少可以整除这些多项式中的一个.

2. 因式分解惟一性定理

(1)数域F上任意次数大于零的多项式$f(x)$都可以分解成数域F上的一些不可约多项式的乘积. 如果

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)=q_1(x)q_2(x)\cdots q_t(x),$$

其中$p_i(x)$与$q_j(x)(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t)$都是$F$上的不可约多

项式,则 $s=t$,并且适当调换 $q_j(x)$ 的次序后可使

$$q_i(x)=c_ip_i(x)(i=1,2,\cdots,s),$$

这里 c_i 是 F 中的不为零的数. 即如果不计零次因式的差别,多项式 $f(x)$ 分解成不可约因式乘积的分解式是惟一的.

(2)数域 F 上任意次数大于零的多项式都有惟一的典型分解式

$$f(x)=ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x),$$

其中 a 为 $f(x)$ 的首项系数,$p_1(x),p_2(x),\cdots,p_s(x)$ 是 F 上首项系数为 1 的互异的不可约多项式,而 $r_1,r_2,\cdots,r_s$ 都是正整数.

(3)如果已知多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的典型分解式,则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式就是那些同时在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的典型分解式中出现的不可约多项式方幂的乘积,所带的方幂的指数等于它在 $f(x)$ 与 $g(x)$ 中所带的方幂指数中较小的一个.

3. 重因式

(1)设 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in F[x]$,其中 x 是文字,称多项式

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+2a_2x+a_1$$

为 $f(x)$ 的微商(或导数). 当 $k>1$ 时,规定 $f^{(k)}(x)$ 为 $f(x)$ 的 $k-1$ 阶微商 $f^{(k-1)}(x)$ 的微商,即 $f^{(k)}(x)=(f^{(k-1)}(x))'$. 多项式的微商与数学分析中的微商有相同的运算性质.

(2)设 $f(x)\in F[x]$,$p(x)$ 是数域 F 上的不可约多项式,k 为非负整数. 如果 $p^k(x)\mid f(x)$,且 $p^{k+1}(x)\nmid f(x)$,则称 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式. 当 $k=1$ 时,称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的单因式;当 $k\geqslant 2$ 时,称 $p(x)$ 为 $f(x)$ 的**重因式**.

注 由于重因式一定是不可约因式,所以 $f(x)$ 的重因式也和 $f(x)$ 所在的数域有关.

(3)有关结论

①如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k(k\geqslant 1)$ 重因式,则它是 $f'(x)$ 的 $k-1$ 重因式. 特别地,$f(x)$ 的单因式不是 $f'(x)$ 的因式.

②如果不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的 $k(k\geqslant 1)$ 重因式,则它是 $f(x),f'(x),\cdots f^{(k-1)}(x)$ 的因式,但不是 $f^{(k)}(x)$ 的因式.

③不可约多项式 $p(x)$ 是 $f(x)$ 的重因式的充要条件是 $p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式,即 $p(x) \mid (f(x), f'(x))$.

注　由此可见 $f(x)$ 的重因式可以在 $(f(x), f'(x))$ 的因式中去找.

④多项式 $f(x)$ 无重因式的充要条件是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 互素,即 $(f(x), f'(x)) = 1$.

⑤设多项式 $f(x)$ 的次数 $\partial^\circ(f(x)) \geqslant 1$,则多项式 $\dfrac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ 是一个没有重因式的多项式,但它与 $f(x)$ 有完全相同的不可约因式.即设 $f(x)$ 有典型分解式为

$$f(x) = ap_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x).$$

则
$$\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = ap_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x).$$

注　这是去掉多项式的因式重数的一个有效方法.

1.1.6　多项式函数与多项式的根

1. 多项式函数

设 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in F[x]$,其中 x 是文字,数 $a \in F$,将 $f(x)$ 的表示式中的 x 用 a 代替得到 F 中的数

$$a_na^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1a + a_0.$$

称之为当 $x = a$ 时 $f(x)$ 的值,记为 $f(a)$,即

$$f(a) = a_na^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_1a + a_0.$$

这样,对每个数 $a \in F$,由多项式 $f(x)$ 确定 F 中惟一的数 $f(a)$ 与之对应,称 $f(x)$ 为 F 上的一个**多项式函数**.

注　前面是用形式的观点来定义多项式 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$,其中 x 是一个文字(其本身的意义有待实际应用时再机动地取定),而系数 $a_i(i = 0,1,2,\cdots,n)$ 在数域 F 中变化.在做多项式的加、减、乘等运算及研究多项式之间的整除关系、最大公因式等时都是这样理解的.当把一元多项式 $f(x)$ 中所含的文字 x 的意义看成一个可以在数域 F 中任意变动的变数符号时,则 $f(x)$ 就表示了一个随着 x 的变动而变化的多项式函数,此时系数 $a_i \in F$ 相对地取定,这就是用函数的观点来定义多项式.对于数域 F 上的一元多项式来说可以证明这

两种观点是统一的，在证明过程中数域 F 包含无限多个元素这一性质是很起作用的. 正因为对于数域 F 上的一元多项式来说这两种观点是统一的，才使得在讨论多项式时无论采用上述两种观点中的哪一种都是不会出问题的.

2. 多项式的根

设 $f(x)\in F[x]$，数 $a\in F$，如果 $f(a)=0$，则称 a 为 $f(x)$ 的一个**根**或**零点**. 如果 $x-a$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式，则称 a 是 $f(x)$ 的 k **重根**；当 $k=1$ 时，称 a 是 $f(x)$ 的**单根**；当 $k>1$ 时，称 a 是 $f(x)$ 的**重根**.

3. 多项式函数的性质

①余数定理

设 $f(x)\in F[x]$，$a\in F$，用一次多项式 $x-a$ 去除 $f(x)$ 所得的余式是一个常数，这个常数等于函数值 $f(a)$.

注 余数定理表明可以采用综合除法确定多项式 $f(x)$ 在 $x=a$ 时的值 $f(a)$ 或验证 a 是 $f(x)$ 的单根或重根，这比直接将 a 代入 $f(x)$ 计算要方便得多.

②因式定理

设 $f(x)\in F[x]$，$a\in F$，则 $(x-a)\mid f(x)$ 的充分必要条件是 $f(a)=0$.

③多项式根的个数定理

$F[x]$ 中 $n(\geqslant 0)$ 次多项式在数域 F 中的根不可能多于 n 个(重根按重数计).

④设 $f(x),g(x)\in F[x]$，且 $f(x),g(x)$ 的次数都不超过 n. 如果对 $n+1$ 个不同的数 $a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}$ 有 $f(a_i)=g(a_i)(i=1,2,\cdots,n+1)$，则 $f(x)=g(x)$.

4. 多项式两种定义等价

数域 F 上两个多项式相等的充分必要条件是它们所定义的数域 F 上的多项式函数相等.

注 $F[x]$ 中两个多项式 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相等是指它们有完全相同的项. 由 F 上的多项式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 所确定的函数相等是指对任意 $a\in F$，都有 $f(a)=g(a)$. 这是两个不同的概念，但因为数域 F 中有无穷多个数，所以由上面 ④ 中的结论知，多项式的相等与多项式函数的相等

实际上是一致的. 换言之,数域 F 上的多项式既可以作为形式表达式来处理,也可以作为函数来处理.

1.1.7　复数域上多项式的因式分解及根的性质

1. 复系数多项式因式分解定理

复系数 $n(\geq 1)$ 次多项式 $f(x)$ 在复数域上都可惟一地分解成一次因式的乘积. 即复数域上任意次数大于 1 的多项式都是可约的.

2. 典型分解式

复系数 $n(\geq 1)$ 次多项式 $f(x)$ 具有典型分解式

$$f(x) = a_n(x - a_1)^{r_1}(x - a_2)^{r_2}\cdots(x - a_s)^{r_s}.$$

其中 a_n 是 $f(x)$ 的首项系数, $a_1,a_2,\cdots,a_s$ 是不同的复数, $r_1,r_2,\cdots,r_s$ 是正整数且 $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n$.

3. 代数基本定理

每个次数≥1 的复系数多项式在复数域中至少有一个根.

4. 复系数多项式的根

n 次复系数多项式在复数域内恰有 n 个复根(重根按重数计算).

5. 根与系数的关系

Vieta 定理　设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是一元 n 次多项式

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0(a_n \neq 0).$$

的 n 个根,则根与多项式的系数之间有下列关系:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_2\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_{n-2}\alpha_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ \qquad\cdots\cdots \\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{n-1} + \cdots + \alpha_2\alpha_3\alpha_4\cdots\alpha_n = (-1)^{n-1}\dfrac{a_1}{a_n} \\ \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = (-1)^n\dfrac{a_0}{a_n} \end{cases}$$

1.1.8　实数域上多项式的因式分解及根的性质

1. 实系数多项式因式分解定理

实系数 $n(\geqslant 1)$ 次多项式 $f(x)$ 在实数域上都可以惟一地分解成一次因式与二次不可约因式的乘积. 即实系数多项式 $f(x)$ 在实数域上不可约的充要条件是 $\partial^\circ(f(x)) = 1$ 或 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 且 $b^2 - 4ac < 0$.

2. 典型分解式

实系数 $n(\geqslant 1)$ 次多项式 $f(x)$ 具有典型分解式

$f(x) = a_n(x - a_1)^{l_1}\cdots(x - a_s)^{l_s}(x^2 + p_1x + q_1)^{k_1}\cdots(x^2 + p_tx + q_t)^{k_t}$,

其中 a_n 是 $f(x)$ 的首项系数, $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 是互异实数, $p_i, q_i (i = 1,2,\cdots,t)$ 是互异的实数对, 且满足 $p_i^2 - 4q_i < 0 (i = 1,2,\cdots,t)$, $l_1, \cdots, l_s$, $k_1, \cdots, k_t$ 都是正整数, 且

$$l_1 + \cdots + l_s + 2k_1 + \cdots + 2k_t = n .$$

3. 实系数多项式的根

如果 a 是实系数多项式 $f(x)$ 的一个非实的复数根, 则它的共轭复数 $\bar{a}$ 也是 $f(x)$ 的根, 并且 a 与 $\bar{a}$ 有同一重数.

由此可知, 奇数次实系数多项式必有实根.

1.1.9　有理数域上多项式的因式分解及根的性质

1. 本原多项式

(1) 如果一个非零的整系数多项式 $f(x)$ 的系数互素, 则称 $f(x)$ 是一个**本原多项式**.

(2) 设 $f(x)$ 是任意一有理系数多项式, 则存在有理数 r 及本原多项式 $h(x)$, 使 $f(x) = rh(x)$, 且这种表示法除了差一个正负号是惟一的, 即如果 $f(x) = rh(x) = sg(x)$, 其中 $f(x), g(x)$ 都是本原多项式, 则必有 $r = \pm s, h(x) = \pm g(x)$.

注　上面结果表明有理系数多项式可以转化为整系数多项式来研究.

(3) **高斯(Gauss)引理**　两个本原多项式的乘积还是本原多项式.

(4) 如果一个非零整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积, 则它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.

(5)设$f(x)$是整系数多项式,$g(x)$为本原多项式,如果$f(x)=g(x)h(x)$,其中$h(x)$是有理系数多项式,则$h(x)$一定是整系数多项式.

2.艾森斯坦(Eisenstein)判别法

设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

是一个整系数多项式,如果存在素数p,使

$$①p\mid a_i(i=0,1,\cdots,n-1);②p\nmid a_n;③p^2\nmid a_0;$$

则$f(x)$在有理数域上不可约.

注1　艾氏判别条件仅是一个判别整系数多项式不可约的充分条件,也就是说,如果一个整系数多项式不满足艾氏判别条件,则它既可能是可约的,也可能是不可约的.

注2　有些整系数多项式$f(x)$不能直接用艾氏判别法来判断其是否可约,此时可以考虑利用适当的文字代换$x=ay+b$(a,b为整数且$a\neq0$),使$f(ay+b)=g(y)$满足艾氏判别条件,从而来判定原多项式$f(x)$不可约.这是一个较好的方法,但未必总是奏效的.

3.有理系数多项式不可约有关结论

(1)有理系数多项式$f(x)$在有理数域上不可约的充要条件是,对任意有理数$a\neq0$和b,多项式$g(x)=f(ax+b)$在有理数域上不可约.

(2)在有理数域上存在任意次数的不可约多项式,如x^n+2在有理数域上不可约.

4.有理数域上多项式根的性质

设$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$是一个整系数多项式,而$\frac{r}{s}$是它的一个有理根,其中$r,s$互素,则必有$s\mid a_n,r\mid a_0$.特别地,如果$f(x)$的首项系数$a_n=1$,则$f(x)$的有理根都是整数根,而且是$a_0$的因子.

注1　当有理系数多项式$f(x)$在有理数域上不可约,且$\partial^\circ(f(x))>1$时,$f(x)$没有有理根.这里$\partial^\circ(f(x))>1$是必须的,如$f(x)=3x+2$有有理根$-\frac{2}{3}$,但$\partial^\circ(f(x))=1$,且$f(x)$不可约.

注2　"有理系数多项式$f(x)$没有有理根,则$f(x)$在有理数域上

不可约."这一命题当$2 \leqslant \partial^\circ(f(x)) \leqslant 3$时是成立的,但$\partial^\circ(f(x)) \geqslant 4$时,命题不再成立,如$f(x) = (x^2+2)^2$没有有理根,但它在有理数域上可约.

5. 求整系数多项式$f(x)$的有理根的方法与步骤

(1)分别求出首项系数与常数项的所有因数s_i, c_j.

(2)当$f(1)$,$f(-1)$皆非零时,则检验$\dfrac{f(1)}{1-\dfrac{c_j}{s_i}}$与$\dfrac{f(-1)}{1+\dfrac{c_j}{s_i}}$是否同时为整数,来排除一些可能的根,以减少验根次数;若$f(1)$,$f(-1)$某一个为零,这时用$x-1$或$x+1$除$f(x)$的商式进行检验即可.

(3)选取使上式同时为整数的所有有理数$\dfrac{c_j}{s_i}$.

(4)利用综合除法逐一检验被选取的有理数是否为$f(x)$的根.

1.2　重点和难点

本章对一元多项式理论作了较深入、系统、全面地论述.一元多项式的内容十分丰富,可归纳为以下四个方面:

(1)一般理论:包括一元多项式的概念、运算、导数及基本性质.

(2)整除理论:包括整除、最大公因式、互素的概念与性质.

(3)因式分解理论:包括不可约多项式,因式分解,重因式,实系数与复系数多项式的因式分解,有理系数多项式不可约的判定等.

(4)根的理论:包括多项式函数,多项式的根,代数学基本定理,有理系数多项式的有理根求法,根与系数的关系等.

一元多项式的重点是整除与因式分解的理论,最基本的结论是带余除法定理、最大公因式的存在表示定理、因式分解的惟一性定理.在学习过程中,如能掌握两大重点和三大基本定理,就能从整体上把握一元多项式的理论.

本章的重点是:多项式的概念,整除理论,因式分解理论.

本章的研究对象是一元多项式.只有首先明确一元多项式的实质

是什么,才能为掌握全章打好基础.多项式被定义为形式表达式,是本章的第一个重点概念.要特别强调形式表达式,通过加法和乘法运算进一步加深理解,并贯彻到所有内容中去.

带余除法定理是讨论问题的基础.因为有时余式不等于零,所以多项式的除法不是总可以进行的,因而,整除就成了两个多项式之间的一种特殊且重要的关系,于是整除就成为一个重点概念.最大公因式、互素是在整除的基础上建立起来的概念,在整个多项式的理论中占重要地位,是必须深入理解的基本概念,特别是互素,在代数学的其它部分常常用到,因此它们成为两个重点概念.整除、最大公因式、互素构成整除理论.

因式分解是本章的中心.因式分解的惟一性定理是一个十分完美的结果,在代数学中很重要.因式分解的惟一性定理是说:次数大于零的多项式可以惟一地分解成不可约多项式的乘积,而不可约多项式是在整除意义上最简单的多项式,因此,定理的实质是把复杂的多项式转化为简单的多项式.整除理论和不可约多项式的概念是研究因式分解惟一性定理的基础;而重因式的概念、特殊数域上的因式分解又是因式分解惟一性定理的具体化;由因式分解的惟一性定理建立了多项式的典型分解式,以典型分解式为工具,又可以从理论上进一步研究整除与最大公因式.因此,因式分解的惟一性定理确实是中心.此外,因式分解理论还彻底解决了中学数学里因式分解中的若干遗留问题.

本章的难点是:多项式形式表达式的概念,不可约多项式的概念与判定.

用形式表达式定义多项式,既是本章的一个重点,又是本章的一个难点.多项式被定义为形式表达式,这与中学数学里的定义相距较远,文字 x 不仅可以代表数,而且可以是其它事物,如以后某些章节中将要谈到的矩阵、线性变换等,x 的意义十分广泛.因而,初学者不易理解.当然,也正是这一点,体现了代数学的特色,成为代数学与其它数学学科的一个区别.多项式的运算是形式地定义的,多项式的导数及求导法则都是形式地进行讨论,并不依赖于数学分析中的同类概念.多项式的形式表达式定义以及由此引起的各种问题,很可能长时间地使初学者

感到困惑. 因此,成为本章的一个难点.

不可约多项式是多项式理论发展中的一个重要概念,是在整除理论的基础上建立的较高级的概念,多项式的可约性与所在的数域有关,从而是较难理解的一个概念. 不可约多项式的判定也是本章的一个难点.

1.3 例题解析

1.3.1 多项式相等的证明方法

1. 利用定义,证明同次项的系数相等.

2. 利用多项式函数相等,即设 $f(x), g(x) \in R[x]$ 且 $\partial^\circ(f(x))$, $\partial^\circ(g(x)) \leqslant n$,若有 $n+1$ 个或更多个不同的数 $c_1, c_2, \cdots, c_{n+1}, \cdots$,使 $f(c_i) = g(c_i), i = 1, 2, \cdots, n+1, \cdots$,则 $f(x) = g(x)$. 特别地,零多项式有无穷多个根的特性要予以重视.

证明多项式是零多项式时,往往采用反证法,利用根的个数定理引出矛盾.

3. 利用次数定理,通常用反证法.

4. 利用整除,证明互相整除,再比较首项系数相等.

例 1 设 $f(x) \in F[x]$,若 $\forall a, b \in F$,都有 $f(a+b) = f(a) + f(b)$,则 $f(x) = kx$,其中 $k \in F$.

证明 **方法 1**:设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$,则只需证明

$$a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = a_0 = 0.$$

取 $a = b = 0$,由条件有 $f(0+0) = f(0) + f(0)$,从而 $f(0) = 0$. 但 $f(0) = a_0$,故 $a_0 = 0$.

由条件可推得,对任意正整数 m,都有

$$f(m) = f(1+1+\cdots+1) = f(1) + f(1) + \cdots + f(1) = mf(1).$$

即 $a_n m^n + a_{n-1} m^{n-1} + \cdots + a_1 m = m(a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1)$.

从而 $a_n m^{n-1} + a_{n-1} m^{n-2} + \cdots + a_2 m + [a_1 - (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1)] = 0$. 因为 m 可取任意正整数,由根的个数定理,所以多项式

$$a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_2 x + [a_1 - (a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1)]$$

只能为零多项式，即 $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_2 = 0$. 于是 $f(x) = a_1x$，令 $a_1 = k$，则 $f(x) = kx$，其中 $k \in F$.

方法2：设 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i$. 由题设令 $a = b$ 得 $f(2a) = 2f(a)$，其中 $\forall a \in F$. 因此 $f(2x) - 2f(x)$ 有无穷多个根，故 $f(2x) = 2f(x)$，从而

$$\sum_{i=0}^{n} 2^ia_ix^i = \sum_{i=0}^{n} 2a_ix^i.$$

由多项式相等的定义得 $2^ia_i = 2a_i, i = 0,1,\cdots,n$. 因此 $a_0 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = a_n = 0$，故 $f(x) = a_1x$，于是令 $a_1 = k$ 即得证.

方法3：由条件有 $f(0+0) = f(0) + f(0)$，从而 $f(0) = 0$. 这说明 $f(x)$ 的常数项为零，于是令 $f(x) = xg(x)$，为此只需证 $g(x) \in F$.

对任意正整数 m，都有 $f(m) = mf(1)$. 同时又有 $f(m) = mg(m)$，故 $g(m) = f(1) = g(1)$. 由此得多项式 $g(x) - g(1)$ 有无穷多个根，因此 $g(x) - g(1) = 0$，得 $g(x) = g(1) \in F$. 令 $g(1) = k$，则 $f(x) = kx$.

方法4：对任意正整数 m，根据题设条件都有 $f(m) = mf(1)$，即 $f(x) - xf(1)$ 有无穷多个根，因此 $f(x) - xf(1) = 0$，即 $f(x) = xf(1)$，令 $f(1) = k$，则 $f(x) = kx$.

注　证法1和证法2首先都从比较系数出发，然后利用根的个数定理证明某些系数全为零；证法3和证法4首先都是巧妙地构造多项式，然后证其为零多项式. 显然，后种方法简捷，但技巧性强.

例2　设 $f(x) \in \mathrm{R}[x]$，且满足

(1) $f(0) = 0$；

(2) 若 $\forall x \in \mathrm{R}$，都有 $f(x^2 + 1) = f^2(x) + 1$.

试求 $f(x)$.

解　由题设条件易知，$f(1) = 1, f(2) = 2, f(5) = 5, f(26) = 26, \cdots$，即多项式 $f(x) - x$ 有无穷多个根，因此 $f(x) - x = 0$，从而 $f(x) = x$.

注　若 $f(x) = x$，则(1)，(2)显然成立. 因此，实数域上多项式 $f(x) = x \Leftrightarrow$ (1)，(2)成立.

例3　试求所有适合 $f(f(x)) = (f(x))^n$ 的非零复系数多项式 $f(x)$，其中 n 是正整数.

解 (1)若 $\partial^\circ(f(x))=0$,则 $f(x)=c$,其中 c 是非零常数. 于是由条件得 $c=c^n$,即 $c^{n-1}=1$,其中解为 $n-1$ 次的单位根

$$c_k=\cos\frac{2k\pi}{n-1}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{n-1},k=0,1,\cdots,n-2.$$

于是 $f(x)=c_k$.

(2)若 $\partial^\circ(f(x))=m>0$,由题设条件比较等式两端多项式的次数得 $m^2=mn$,即 $m=n$,故 $f(x)$ 是 n 次多项式,令 $f(x)=a_0x^n+\cdots+a_n$,则

$$f(f(x))=a_0(f(x))^n+\cdots+a_{n-1}(f(x))+a_n=(f(x))^n,$$

$$(a_0-1)(f(x))^n+\cdots+a_{n-1}(f(x))+a_n=0,$$

$$a_0=1,a_1=\cdots=a_{n-1}=a_n=0.$$

故 $f(x)=x^n$.

1.3.2 整除性的证明方法

1. 利用定义及其性质.
2. 利用带余除法.
3. 利用多项式的典型分解式.
4. 利用因式定理及 n 次单位根的性质.
5. 利用不可约多项式的性质.
6. 利用多项式的最大公因式及互素的性质.

例 4 设 $f(x),g(x)\in F[x]$,证明 $g^2(x)\mid f^2(x)\Leftrightarrow g(x)\mid f(x)$.

证明 充分性由整除的定义易证. 下面证明必要性.

方法 1:若 $f(x)=0$,则显然有 $g(x)\mid f(x)$. 若 $f(x)\neq 0$,则 $g(x)\neq 0$,从而可设 $f(x),g(x)$ 的典型分解式分别为

$$f(x)=ap_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_r^{k_r}(x),g(x)=bq_1^{l_1}(x)q_2^{l_2}(x)\cdots q_s^{l_s}(x).$$

其中 $p_i(x),q_j(x)$ 是互异的首项系数为 1 的不可约多项式,$k_i,l_j(i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,s)$ 是正整数. 由于 $g^2(x)\mid f^2(x)$,则有

$$a^2p_1^{2k_1}(x)\cdots p_r^{2k_r}(x)=b^2q_1^{2l_1}(x)\cdots q_s^{2l_s}(x)h(x),$$

由不可约多项式的性质得 $q_1(x),q_2(x),\cdots,q_s(x)$ 必为 $p_1(x),p_2(x),\cdots,p_r(x)$ 中某些个,即 $s\leqslant r$. 不妨令 $q_i(x)=p_i(x),i=1,2,\cdots,s$,其中必有 $2l_i\leqslant 2k_i,l_i\leqslant k_i(i=1,2,\cdots,s)$. 因此,$g(x)\mid f(x)$.

方法2:若$f(x)\neq 0$,则$g(x)\neq 0$,从而$(f(x),g(x))=d(x)\neq 0$,设

$$f(x)=d(x)f_1(x),g(x)=d(x)g_1(x),$$

则$(f_1(x),g_1(x))=1$,进而$(f_1^2(x),g_1^2(x))=1$. 但由$g^2(x)\mid f^2(x)$,$d(x)\neq 0$得$g_1^2(x)\mid f_1^2(x)$,因此得$g_1(x)=c$,c为非零常数. 于是$g(x)=cd(x)$,$g(x)\mid f(x)$.

方法3: 设$(f(x),g(x))=d(x)\neq 0$,则存在$u(x),v(x)\in F[x]$使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x).$$

进而
$$\frac{f(x)}{d(x)}u(x)+\frac{g(x)}{d(x)}v(x)=1.$$

对上式两端同乘$f(x)$得$\frac{f^2(x)}{d(x)}u(x)+g(x)\frac{f(x)}{d(x)}v(x)=f(x)$.

由$g^2(x)\mid f^2(x)$,得$f^2(x)=g^2(x)h(x)$,将其代入上式得

$$g(x)\left[\frac{g(x)}{d(x)}h(x)u(x)+\frac{f(x)}{d(x)}v(x)\right]=f(x).$$

因此$g(x)\mid f(x)$.

方法4: 由$g^2(x)\mid f^2(x)$,则$f^2(x)=g^2(x)h(x)$. 设a为$g(x)$的任意一根,由$g(a)=0$,可得$f(a)=0$,这说明$g(x)$的每一根必为$f(x)$的根. 因此,在复数域上有$g(x)\mid f(x)$,又因多项式的整除性不因数域扩大而改变,故在一般数域F上也有$g(x)\mid f(x)$.

方法5: 假设$g(x)\nmid f(x)$,设$(f(x),g(x))=d(x)\neq 0$,则有$\partial^\circ(g(x))>\partial^\circ(d(x))$,且$(f^2(x),g^2(x))=d^2(x)$,而由$g^2(x)\mid f^2(x)$推得$g^2(x)\mid d^2(x)$,因此$\partial^\circ(d^2(x))\geqslant\partial^\circ(g^2(x))$,即$\partial^\circ(d(x))\geqslant\partial^\circ(g(x))$,矛盾. 故$g(x)\mid f(x)$.

思考:设k是任意正整数,试问$g^k(x)\mid f^k(x)$与$g(x)\mid f(x)$是否等价?

例5 证明$x^2+x+1\mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$,其中$m,p,n$是三个任意的正整数.

证明 用因式定理来证明. 可求得x^2+x+1的根为

$$\varepsilon_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},\varepsilon_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}.$$

即 $x^2+x+1=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)$. 又 $x^2+x+1\mid x^3-1$,所以 $\varepsilon_i^{\ 3}=1$,从而 $\varepsilon_i^{\ 3m}=\varepsilon_i^{\ 3n}=\varepsilon_i^{\ 3p}=1$,于是 $\varepsilon_i^{\ 3m}+\varepsilon_i^{\ 3n+1}+\varepsilon_i^{\ 3p+2}=1+\varepsilon_i+\varepsilon_i^{\ 2}=0, i=1,2$. 由因式定理知 $x-\varepsilon_i\mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$,又因为 $(x-\varepsilon_1,x-\varepsilon_2)=1$, 所以

$(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)\mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$,即 $x^2+x+1\mid x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$.

例 6　设 $p(x),q(x),r(x),s(x)\in F[x]$,且

$$p(x^5)+xq(x^5)+x^2r(x^5)=(x^4+x^3+x^2+x+1)s(x). \qquad (1)$$

求证:$x-1\mid(p(x),q(x),r(x),s(x))$.

证明　只需证明 $x-1$ 是 $p(x),q(x),r(x),s(x)$ 的公因式.

设 $x^4+x^3+x^2+x+1=(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)$,又因为

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1),$$

故 $\varepsilon_i^{\ 5}=1, i=1,2,3,4$. 由(1)得

$$\begin{cases}p(\varepsilon_1^{\ 5})+\varepsilon_1q(\varepsilon_1^{\ 5})+\varepsilon_1^{\ 2}r(\varepsilon_1^{\ 5})=0\\ p(\varepsilon_2^{\ 5})+\varepsilon_2q(\varepsilon_2^{\ 5})+\varepsilon_2^{\ 2}r(\varepsilon_2^{\ 5})=0\\ p(\varepsilon_3^{\ 5})+\varepsilon_3q(\varepsilon_3^{\ 5})+\varepsilon_3^{\ 2}r(\varepsilon_3^{\ 5})=0\end{cases},\text{即}\begin{cases}p(1)+\varepsilon_1q(1)+\varepsilon_1^{\ 2}r(1)=0\\ p(1)+\varepsilon_2q(1)+\varepsilon_2^{\ 2}r(1)=0\\ p(1)+\varepsilon_3q(1)+\varepsilon_3^{\ 2}r(1)=0\end{cases}$$

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 可以看作方程 $p(1)+xq(1)+x^2r(1)=0$ 的三个根,则 $p(1)=q(1)=r(1)=0$.(或:因为齐次线性方程组的系数行列式是关于 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的范德蒙德行列式,且不等于零,所以齐次组只有零解)

由(1)式得 $p(1)+q(1)+r(1)=5s(1)$,从而 $s(1)=0$,于是1是 $p(x),q(x),r(x),s(x)$ 的公根,即 $x-1$ 是 $p(x),q(x),r(x),s(x)$ 的公因式.

例 7　设 $p(x)$ 是数域 F 上的一个不可约多项式,且 $p(x)$ 有一个复数根 a,$f(x)$ 是 F 上任意多项式,且 $f(a)=0$,则 $p(x)\mid f(x)$.

证明　由题设条件和因式定理知 $x-a$ 是 $p(x)$ 与 $f(x)$ 的公因式,因而 $p(x)$ 与 $f(x)$ 在复数域上不互素,而互素不随数域的变化而改变,故 $p(x)$ 与 $f(x)$ 在数域 F 上不互素. 又 $p(x)$ 是不可约多项式,根据不可约多项式的性质知 $p(x)\mid f(x)$.

1.3.3　最大公因式的证法

1. 定义法.

2. $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式 $\Leftrightarrow$ 存在 $u(x),v(x)\in F[x]$,使 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$,且 $d(x)\mid f(x),d(x)\mid g(x)$.

3. 反证法.

4. 设 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$,则 $(f(x),g(x))=(g(x),r(x))$.

5. 利用互素的性质:若 $(f(x),g(x))=1,(f(x),h(x))=1$,则 $(f(x),g(x)h(x))=1$.

例8　设 $f(x),g(x)\in F[x],a,b,c,d\in F$ 且 $ad-bc\neq 0$. 证明

$$(f(x),g(x))=(af(x)+bg(x),cf(x)+dg(x)).$$

证明　令 $(f(x),g(x))=d(x),af(x)+bg(x)=f_1(x),cf(x)+dg(x)=g_1(x),(f_1(x),g_1(x))=d_1(x)$. 往证 $d(x)=d_1(x)$.

由 $(f(x),g(x))=d(x)$,则由整除性质易得

$$d(x)\mid af(x)+bg(x),d(x)\mid cf(x)+dg(x),$$

故 $d(x)\mid d_1(x)$.

下面证 $d_1(x)\mid d(x)$. 由 $af(x)+bg(x)=f_1(x),cf(x)+dg(x)=g_1(x)$ 解得

$$f(x)=\frac{1}{ad-bc}[df_1(x)-bg_1(x)],g(x)=\frac{1}{ad-bc}[-cf_1(x)+ag_1(x)].$$

由于 $(f_1(x),g_1(x))=d_1(x)$,即 $d_1(x)\mid f_1(x),d_1(x)\mid g_1(x)$,因此 $d_1(x)\mid f(x),d_1(x)\mid g(x)$,故 $d_1(x)\mid d(x)$.

由于 $d(x)$ 与 $d_1(x)$ 都是首项系数为1的多项式,且相互整除,因此 $d(x)=d_1(x)$.

请读者用定义法证明本例.

注1　通过证明互相整除来证明两多项式相等,是一个重要的方法,这也是对1.3.1证明题的补充.

注2　由此可以构造许多等式,如 $(f(x),g(x))=(f(x)\pm g(x),g(x))$;$(f(x)+2g(x),f(x)-g(x))=(f(x)+g(x),f(x)-4g(x))$ 等.

注3　当 $ad-bc=0$ 时,命题不成立,如 $f(x)=g(x)=x,a=1,$

$b=-1, c=d=0$，即一反例.

例 9 设 $f(x), g(x) \in F[x]$，证明

$$(f(x), g(x))=1 \Leftrightarrow (f(x)+g(x), f(x)g(x))=1.$$

证明 必要性. 由 $(f(x), g(x))=1$，则 $\exists u(x), v(x) \in F[x]$ 使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1,$$

进而有 $f(x)u(x)+g(x)v(x)+g(x)u(x)-g(x)u(x)=1$，

即 $$(f(x)+g(x))u(x)+g(x)(v(x)-u(x))=1.$$

故 $(f(x)+g(x), g(x))=1$. 同理可证 $(f(x)+g(x), f(x))=1$. 所以有 $(f(x)+g(x), f(x)g(x))=1$.

充分性. 由 $(f(x)+g(x), f(x)g(x))=1$，则 $\exists u(x), v(x) \in F[x]$，使

$$(f(x)+g(x))u(x)+f(x)g(x)v(x)=1$$

由此得 $f(x)(u(x)+g(x)v(x))+g(x)u(x)=1$，故 $(f(x), g(x))=1$.

注 上述必要性的证明中关键在于 $(f(x)+g(x), g(x))=1$，如采用反证则更加简捷. 事实上，假设 $(f(x)+g(x), g(x))=d(x) \neq 1$，则由 $d(x) \mid f(x)+g(x)$，$d(x) \mid g(x)$，得 $d(x) \mid f(x)$，进而 $d(x) \mid (f(x), g(x))$，即 $d(x) \mid 1$，因此 $d(x)=1$，这与 $d(x) \neq 1$ 矛盾.

例 10 设 $f(x), g(x) \in F[x]$，且 $\partial^{\circ}(f(x))>0$，$\partial^{\circ}(g(x))>0$. 若 $(f(x), g(x))=1$，则在 $F[x]$ 中存在惟一多项式 $u(x), v(x)$ 使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=1,$$

且 $\partial^{\circ}(u(x))<\partial^{\circ}(g(x))$，$\partial^{\circ}(v(x))<\partial^{\circ}(f(x))$.

证明 先证存在性. 由 $(f(x), g(x))=1$，则 $\exists u_1(x), v_1(x) \in F[x]$，使

$$f(x)u_1(x)+g(x)v_1(x)=1.$$

又由 $\partial^{\circ}(f(x))>0$，$\partial^{\circ}(g(x))>0$，故 $g(x) \nmid u_1(x)$，$f(x) \nmid v_1(x)$，于是由带余除法得

$$u_1(x)=g(x)q_1(x)+r_1(x)，且 \partial^{\circ}(r_1(x))<\partial^{\circ}(g(x));$$

$$v_1(x)=f(x)q_2(x)+r_2(x)，且 \partial^{\circ}(r_2(x))<\partial^{\circ}(f(x)).$$

由此推得

$$f(x)(g(x)q_1(x)+r_1(x))+g(x)(f(x)q_2(x)+r_2(x))=1,$$

即　$f(x)r_1(x)+g(x)r_2(x)+f(x)g(x)(q_1(x)+q_2(x))=1$.

但因 $\partial^{\circ}(f(x)g(x))>\partial^{\circ}(f(x)r_1(x))$,$\partial^{\circ}(f(x)g(x))>\partial^{\circ}(g(x)r_2(x))$,必有 $q_1(x)+q_2(x)=0$,故有 $f(x)r_1(x)+g(x)r_2(x)=1$,于是令

$$u(x)=r_1(x),v(x)=r_2(x)$$

即为所求.

再证惟一性.假设还有一对满足题设要求的多项式 $u_0(x),v_0(x)$,则有

$$(u(x)-u_0(x))f(x)=(v_0(x)-v(x))g(x).$$

假若 $u(x)\neq u_0(x)$,则由 $(f(x),g(x))=1$ 推出 $g(x)\mid u(x)-u_0(x)$.但

$$\partial^{\circ}(u(x)-u_0(x))<\partial^{\circ}(g(x)),$$

矛盾.故必有 $u(x)=u_0(x)$,同理 $v(x)=v_0(x)$.

思考:若 $(f(x),g(x))=d(x)\neq 1$,且 $\partial^{\circ}(f(x))>0$,$\partial^{\circ}(g(x))>0$,是否存在 $F[x]$ 中惟一的多项式 $u(x),v(x)$ 使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x).$$

此时,对 $u(x),v(x)$ 怎样限制才能使其惟一?

1.3.4　重因式(或重根)的判别法

1. $f(x)$ 无(有)重因式 $\Leftrightarrow (f(x),f'(x))=1$ ($(f(x),f'(x))\neq 1$ 或 $f(x),f'(x)$ 有公根).

2. $p(x)$ 为 $f(x)$ 的 $k+1$ 重因式 $\Leftrightarrow p(x)$ 为 $f'(x)$ 的 k 重因式,且 $p(x)\mid f(x)$.特别地,$p(x)$ 为 $f(x)$ 的重因式 $\Leftrightarrow p(x)$ 是 $f(x)$ 与 $f'(x)$ 的公因式.

3. 待定系数法.

4. $\dfrac{f(x)}{(f(x),f'(x))}$ 是一个与 $f(x)$ 有相同的不可约因式,且没有重因式的多项式.

5. $f(x)$ 有重根 $\Leftrightarrow f(x)$ 与 $f'(x)$ 的结式 $R(f(x),f'(x))=0$.

例 11　数域 F 上任意一个不可约多项式 $f(x)$ 在复数域内无重根.

证明　因为 $f(x)$ 是数域 F 上不可约多项式,则必有 $(f(x),f'(x))=1$.因最大公因式不因数域扩大而改变,所以在复数域内

$f(x)$ 与$f'(x)$ 也互素,即$(f(x),f'(x))=1$. 故$f(x)$ 在复数域内无重因式,因此$f(x)$ 在复数域内无重根.

试问:多项式$f(x)$ 在 $F[x]$ 中无重因式与$f(x)$ 在 $C[x]$ 中无重因式是否等价? 为什么?

例 12 当正整数 n 取何值时,$f(x)=(x+1)^n-x^n-1$ 有重因式.

分析 考虑$f(x)$ 的重因式问题,一般来说总是从求$(f(x),f'(x))$ 入手. 若$f(x)$ 的次数不高,则利用辗转相除法确定$(f(x),f'(x))$,或考察$f(x)$ 与$f'(x)$ 的结式$R(f(x),f'(x))$;若$f(x)$ 的次数较高或不定时,也可通过$f(x)$ 与$f'(x)$ 有公共根来讨论$f(x)$ 的重因式.

解 $f'(x)=n(x+1)^{n-1}-nx^{n-1}$. 由重因式判别定理知,$f(x)$ 有重因式的充要条件是$f(x)$ 与$f'(x)$ 不互素,即$f(x)$ 与$f'(x)$ 有公共根 a,于是

$f(a)=(a+1)^n-a^n-1=0,f'(a)=n(a+1)^{n-1}-na^{n-1}=0$.

即 $(a+1)^n=a^n+1,(a+1)^{n-1}=a^{n-1}$, 从而

$$a^n+1=(a+1)^n=(a+1)(a+1)^{n-1}=(a+1)a^{n-1},$$

由此得 $a^{n-1}=1,(a+1)^{n-1}=1$. 这表明 a 与 $a+1$ 都是 $n-1$ 次单位根. 令 $a=a_1+b_1i$,则 $a+1=(a_1+1)+b_1i$,由 $|a|=|a+1|=1$ 得 $a_1^2+b_1^2=(a_1+1)^2+b_1^2=1$, 所以 $a_1=-\frac{1}{2},b_1=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. 于是 $a=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$,即 a 是 3 次单位根. 再由 a 是 $n-1$ 次单位根得 $3\mid n-1$.

例 13 设$f(x)$ 是数域 F 上一个 $n(>0)$ 次多项式,证明:$f'(x)\mid f(x)$ 的充要条件是$f(x)$ 有 n 重根.

证明 充分性. 因为$f(x)$ 有 n 重根,且$f(x)$ 的次数是 n,故$f(x)=a(x-b)^n$,于是$f'(x)=na(x-b)^{n-1}$,因而$f'(x)\mid f(x)$.

必要性.

方法 1:典型分解式法. 设$f(x)$ 的典型分解式为

$$f(x)=ap_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_r^{k_r}(x),$$

其中 $p_i(x)(i=1,2,\cdots,r)$ 是 F 上首项系数为 1 的互异的不可约多项式,a 是$f(x)$ 的首项系数,$k_i(i=1,2,\cdots,r)$ 是正整数且 $k_1+k_2+\cdots+$

$k_r = n$. 则

$$f'(x) = p_1^{k_1-1}(x)p_2^{k_2-1}(x)\cdots p_r^{k_r-1}(x)g(x),$$

其中 $g(x)$ 不能被任何 $p_i(x)(i = 1,2,\cdots,r)$ 整除.

因为 $f'(x) \mid f(x)$,所以 $g(x) \mid p_1(x)p_2(x)\cdots p_r(x)$,可见 $g(x)$ 可能的因式是非零常数及 $p_i(x)(i = 1,2,\cdots,r)$,但 $p_i(x)(i = 1,2,\cdots,r)$ 不整除 $g(x)$,故 $g(x) = c \neq 0$.

设 $\partial^\circ(p_i(x)) = n_i(i = 1,2,\cdots,r)$,则有

$$n_1k_1 + n_2k_2 + \cdots + n_rk_r = n.$$

从而推出 $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = 1$. 由于 $n_i(i = 1,2,\cdots,r)$ 是正整数,因此

$$r = 1, n_1 = 1, k_1 = n.$$

于是 $f(x) = ap_1^n(x)$. 设 $p_1(x) = x - b$,则有

$$f(x) = a(x-b)^n, a,b \in F,$$

即 $f(x)$ 有 n 重根.

方法2:待定系数法. 设 $f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0, a_i \in F, a_n \neq 0$,则 $f'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$,由 $f'(x) \mid f(x)$ 及 $\partial^\circ(f(x)) = \partial^\circ(f'(x)) + 1$ 知,存在多项式 $cx + d$ 使 $f(x) = (cx + d)f'(x)$. 因而 $c = \dfrac{1}{n}$,此时

$$f(x) = (\frac{1}{n}x + d)f'(x) = \frac{1}{n}(x + nd)f'(x) = \frac{1}{n}(x - b)f'(x),$$

其中 $b = -nd$. 于是 $(f(x), f'(x)) = \dfrac{1}{na_n}f'(x)$,即为首项系数为1的 $n-1$ 次多项式. 故

$$\frac{f(x)}{(f(x), f'(x))} = \frac{\frac{1}{n}(x-b)f'(x)}{\frac{1}{na_n}f'(x)} = a_n(x - b).$$

由于 $\dfrac{f(x)}{(f(x), f'(x))}$ 包含了 $f(x)$ 的全部不可约因式,所以 $f(x)$ 的不可约因式只能是 $x - b$ 及它的非零常数倍. 由于 $f(x)$ 的次数是 n,所以 $f(x) = a(x-b)^n, a,b \in F$,即 $f(x)$ 有 n 重根.

方法3:重因式法. 由 $f'(x) \mid f(x)$,令

$$nf(x) = (x-b)f'(x),$$

由此求导得 $(n-1)f'(x) = (x-b)f''(x)$,

依次逐次求导,整理得 $(n-2)f''(x) = (x-b)f^{(3)}(x)$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n-1)}(x) = (x-b)f^{(n)}(x).$$

其中 $f^{(n)}(x) = n!a$,a 是 $f(x)$ 的首项系数. 由上式逐个代入整理得

$$f(x) = a(x-b)^n,$$

故 $f(x)$ 有 n 重根.

方法 4:重根法. 设 a 为 $f(x)$ 的 r 重根,则

$$f(x) = (x-a)^r g(x),\text{其中 } g(a) \neq 0.$$

其中 $x-a$ 不整除 $rg(x)+(x-a)g'(x)$. 由 $f'(x) \mid f(x)$ 得,$rg(x)+(x-a)g'(x) \mid g(x)$,由此可得 $g(x) \mid g'(x)$. 进而 $\partial^\circ(g(x)) = 0$,即 $r = n, g(x) = b$,于是

$$f(x) = b(x-a)^n, a, b \in F,$$

从而 $f(x)$ 有 n 重根.

方法 5:数学归纳法.

当 $n=1$ 时,命题显然成立. 下面假设命题对 $n-1$ 次多项式成立,现证明 $n(\geqslant 2)$ 次多项式 $f(x)$ 的情形.

由 $f'(x) \mid f(x)$,则有

$$f(x) = c(x-d)f'(x),$$

$$f'(x) = cf'(x) + c(x-d)f''(x),$$

$$(1-c)f'(x) = c(x-d)f''(x).$$

由此知 $f''(x) \mid f'(x)$,又因为 $\partial^\circ(f'(x)) = n-1$,由归纳假设有 $f'(x) = c_1(x-b)^{n-1}$,于是 $f(x) = cc_1(x-d)(x-b)^{n-1}$. 对此求导得

$$f'(x) = cc_1(x-b)^{n-2}[(x-b)+(n-1)(x-d)],$$

此式与 $f'(x) = c_1(x-b)^{n-1}$ 比较即得 $b=d$,令 $a = cc_1$,就有 $f(x) = a(x-b)^n$,从而 $f(x)$ 有 n 重根.

1.3.5 不可约多项式的判别方法

证明一个多项式是不可约多项式,往往利用:

1. 反证法.

2. 定义法.

3. Eisenstein 判别法. 值得注意的是,此方法只适用于判定有理数域上多项式的不可约性;此判别条件只是充分条件,而不是必要条件. 因此,证明整系数多项式在有理数域上不可约是复杂的,方法多样,技巧性很强.

例 14　判别多项式 $f(x) = x^3 + 3x + 1$ 在有理数域上是否可约?

解　**方法 1**. 因为 $\partial^\circ(f(x)) = 3$,如果 $f(x)$ 可约,则 $f(x)$ 必有一次因式,从而 $f(x)$ 必有有理根. 由于 $f(x)$ 的常数项为 1,首项系数为 1,故 $f(x)$ 的有理根只可能为 ± 1,但 $f(1) = 5 \neq 0, f(-1) = -3 \neq 0$,故 $f(x)$ 无有理根,从而 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

方法 2. 令 $x = y - 1$,则 $g(y) = f(y-1) = y^3 - 3y^2 + 6y - 3$. 取 $p = 3$,由于 $3 \nmid 1, 3 \mid -3, 6, -3$,但 $3^2 \nmid -3$,故由艾森斯坦判别法知,$f(x)$ 在有理数域上不可约.

注 1　如果次数 $\geqslant 2$ 的有理系数多项式有有理根,则它当然是可约的;但如果它没有有理根,则只能说它没有一次因式,它还可能有别的因式,所以我们一般不能依此就断定它不可约. 只有当多项式的次数 $\leqslant 3$ 时,才能根据它没有有理根而断定它不可约.

注 2　本例不能直接使用艾森斯坦判别法,但经过变换 $x = y - 1$,$f(x)$ 可化为应用艾森斯坦判别法的情形,这是判别整系数多项式不可约的一个常用方法.

例 15　求所有整数 m,使多项式 $f(x) = x^5 + mx + 1$ 在有理数域上可约.

解　分两种情形讨论:

(1) 若 $f(x)$ 有有理根,则 $f(1) = m + 2 = 0$ 或 $f(-1) = -m = 0$,解得 $m = -2$ 或 $m = 0$.

(2) 若 $f(x)$ 无有理根,则 $f(x)$ 可分解为一个 2 次多项式与一个 3 次多项式的乘积. 设

$$f(x) = x^5 + mx + 1 = (x^2 + ax + 1)(x^3 + bx^2 + cx + 1)$$

或

$$f(x) = x^5 + mx + 1 = (x^2 + ax - 1)(x^3 + bx^2 + cx - 1),$$

其中 a,b,c 都是整数. 将第一个式子右端展开,比较两端同次项系数,得 $a=1,b=-1,c=0,m=1$. 将第二个式子右端展开,比较两端同次项系数求不出整数解.

综上所述,当且仅当 $m=0,1,-2$ 时,$f(x)$ 在有理数域上可约.

例 16 设 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是两两不同的整数. 证明 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

证明 反证法. 假设 $f(x)$ 在有理数域上可约,则 $f(x)$ 可以分解成两个次数 $<n$ 的整系数多项式之积,即 $f(x)=g(x)h(x)$. 由题设可得

$$f(a_i)=g(a_i)h(a_i)=-1, i=1,2,\cdots,n.$$

由于 $g(a_i),h(a_i)$ 都是整数,故 $g(a_i)=1,h(a_i)=-1$ 或 $g(a_i)=-1,h(a_i)=1$,即总有

$$g(a_i)+h(a_i)=0, i=1,2,\cdots,n.$$

可见多项式 $g(x)+h(x)$ 有 n 个互异的根. 但 $\partial^\circ(g(x)+h(x))<n$,这与多项式根的个数定理矛盾,所以 $f(x)$ 在有理数域上不可约.

注 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两互异这一条件是不可少的,否则命题不成立. 例如 $f(x)=(x-1)^2-1=x(x-2)$,即 $f(x)$ 在有理数域上可约.

1.3.6 有关多项式根的问题

例 17 已知:对于实多项式 $f(x)=x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ 的任意一根 a,都有 $\frac{1}{a},1-a$ 也是根,求 $f(x)$.

解 显然 $a\neq 0,1$. 由题设条件有 $a,\frac{1}{a},1-a,\frac{1}{1-a},1-\frac{1}{a},1-\frac{1}{1-a}$ 为 $f(x)$ 的根,由于 $f(x)$ 是 5 次多项式,故上面的根必有两个相等. 由

$$a=\frac{1}{a},a=1-a,a=\frac{1}{1-a},a=1-\frac{1}{a},a=1-\frac{1}{1-a}.$$

解得 $a=-1,a=\frac{1}{2},a=2,a=\frac{1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$. 于是 $f(x)$ 有如下 7 种结果:

$$f(x)=(x+1)(x-2)(x-\frac{1}{2})(x-\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2})(x-\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2});$$

$f(x)=(x+1)^3(x-2)(x-\frac{1}{2})$;$f(x)=(x+1)(x-2)^3(x-\frac{1}{2})$;

$f(x)=(x+1)(x-2)(x-\frac{1}{2})^3$;$f(x)=(x+1)^2(x-2)^2(x-\frac{1}{2})$;

$f(x)=(x+1)^2(x-2)(x-\frac{1}{2})^2$;$f(x)=(x+1)(x-2)^2(x-\frac{1}{2})^2$.

例18　求$f(x)=x^7+2x^6-6x^5-8x^4+17x^3+6x^2-20x+8$的全部根.

解　1是$f(x)$的4重根，-2是$f(x)$的3重根.

先用辗转相除法求出$(f(x),f'(x))=x^5+x^4-5x^3-x^2+8x-4$，于是，

$$\frac{f(x)}{(f(x),f'(x))}=x^2+x-2=(x-1)(x+2).$$

与$f(x)$有完全相同的不可约因式$x-1,x+2$,可见$f(x)$有根1，-2.再用综合除法验证重数分别为4,3.

或可用试根法,留给读者来完成.

例19　求作一个多项式,使它的各个根分别等于多项式$f(x)=x^4-3x^2+7$的各个根减1.

解　用综合除法,将$f(x)$表示成$x-1$的方幂展开式为

$f(x)=(x-1)^4+4(x-1)^3+3(x-1)^2-2(x-1)+5$.

故所求多项式为$x^4+4x^3+3x^2-2x+5$.

1.4　练习题及答案

1.4.1　练习题

1. 当a,b,c取何值时,多项式

$f(x)=x-5$与$g(x)=a(x-2)^2+b(x+1)+c(x^2-x+2)$.

相等.

2. 设$f(x)=1+x+\cdots+x^{n+1}$,$g(x)=1+x+\cdots+x^{n-1}$,证明:

$$f(x)\cdot g(x)=(1+x+\cdots+x^n)^2-x^n.$$

3. 证明:多项式

$f(x) = (x^{50} - x^{49} + \cdots + x^2 - x + 1)(x^{50} + x^{49} + \cdots + x^2 + x + 1).$

的展开式中不含奇数次项.

4. 设$f(x),g(x),h(x) \in \mathrm{R}[x]$,且$f^2(x) = xg^2(x) + xh^2(x)$,则

$$f(x) = g(x) = h(x) = 0.$$

5. 设$f(x) \in F[x]$,若

(1) $\forall a \in F, a \neq 0$,都有$f(x-a) = f(x)$,试问$f(x)$是什么样的多项式?

(2) $\forall a \in F$,都有$f(ab) = f(a)f(b)$,试问$f(x)$是什么样的多项式?

6. 证明$f(x) = \sin x$不可写成多项式.

7. 设$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \in \mathrm{R}[x]$,且$a_1^{\ 2} < \frac{2n}{n-1}a_2$. 则$f(x)$不可能有$n$个实根.

8. 若$f(x) \mid f(x^n)$,则$f(x)$的根只能是零或单位根.

9. 证明$x(x+1)(2x+1) \mid (x+1)^{2m} - x^{2m} - 2x - 1$.

10. 设$p(x)$是数域F上的一个不可约多项式,且$p(x)$有一个复数根a,$f(x)$是F上任意多项式,且$f(a) = 0$,则$p(x) \mid f(x)$.

11. 设$f(x),g(x),h(x),l(x)$满足

$$\begin{cases}(x^2+1)h(x) + (x+1)f(x) + (x+2)g(x) = 0\\(x^2+1)l(x) + (x-1)f(x) + (x-2)g(x) = 0\end{cases}$$

证明:$x^2 - 1 \mid f(x)$,$x^2 - 1 \mid g(x)$.

12. 设$f_1(x),\cdots,f_{n-1}(x) \in F[x]$,$n > 2$,若

$$x^{n-1} + \cdots + x + 1 \mid f_1(x^n) + xf_2(x^n) + \cdots + x^{n-2}f_{n-1}(x^n),$$

则$x - 1 \mid f_i(x)$,$i = 1,2,\cdots,n-1$.

13. 如果$x - 1 \mid f(x^n)$,则$x^n - 1 \mid f(x^n)$.

14. 证明$x \mid f^k(x)$的充要条件是$x \mid f(x)$,其中k是任意正整数.

15. 证明:若$(f(x),g(x)) = 1$,则$(f^2(x) - 4g^2(x),g(x)) = 1$.

16. 设$f(x) = 3x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 6x^2 - 5x - 6$,$g(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - x - 2$,

(1)求$(f(x),g(x))$;

(2)求多项式 $u(x),v(x)$,使 $f(x)u(x)+g(x)v(x)=(f(x),g(x))$.

17.设 $f(x),g(x)\in F[x]$,证明

(1) $(f(x),g(x))=(f(x)\pm g(x)u(x),g(x))$,其中 $\forall u(x)\in F[x]$;

(2)设 $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0(a_0\neq 0)$,

$$g(x)=x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_2x+a_1,$$

则 $(f(x),g(x))=1$.

18.证明:x^8+1 在有理数域上不可约.

19.设 $p(x)$ 是 $F[x]$ 中次数 >0 的多项式,且对于任意 $f(x)\in F[x]$,都有 $p(x)\mid f(x)$ 或 $(p(x),f(x))=1$,则 $p(x)$ 是 F 上的不可约多项式.

20. 设 $f(x)$ 是 $F[x]$ 中次数 >0 的多项式,试证:$f(x)$ 等于某个不可约多项式 $p(x)$ 的方幂的充要条件是:$\forall g(x),h(x)\in F[x]$,或者 $(f(x),g(x))=1$,或者存在某个正整数 m,使 $f(x)\mid h^m(x)$.

21.设 $f(x)$ 是 $F[x]$ 中次数 >0 的多项式,试证:$f(x)$ 等于某个不可约多项式 $p(x)$ 的方幂的充要条件是:$\forall g(x),h(x)\in F[x]$,只要 $f(x)\mid g(x)h(x)$ 就有 $f(x)\mid g(x)$ 或存在某个正整数 m,使 $f(x)\mid h^m(x)$.

22.将多项式 $f(x)=7x^4+x^3-8x^2+8x-9$ 表成

$$f(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)+bx(x-1)(x-2)+cx(x-1)+dx+e$$

的形式.

23.若 p 是素数,判断多项式 $f(x)=x^p+px+2p-1$ 在有理数域上是否可约?

24.求多项式 $f(x)=x^4+2x^2+9$ 与 $g(x)=x^4-4x^3+4x^2-9$ 的公共根.

25.已知 $f(x)=x^5-10x^2+15x-6$ 有重根,试求它的所有根并确定重数.

26.证明多项式 $f(x)=x^{2n}-nx^{n+1}+nx^{n-1}-1$ 以1为3重根.

1.4.2　练习题答案

1. $a=-\dfrac{6}{5},b=-\dfrac{13}{5},c=\dfrac{6}{5}$.

利用多项式相等的定义,即对应同次项的系数相等;也可利用多项式恒等取一些特殊的 x 值来确定参数.

2. 证明:设 $h(x)=1+x+\cdots+x^n$,则 $f(x)=h(x)+x^{n+1}$,$g(x)=h(x)-x^n$,故

$$f(x)\cdot g(x)=(h(x)+x^{n+1})(h(x)-x^n).$$
$$=h^2(x)-x^nh(x)+x^{n+1}h(x)-x^{2n+1}=h^2(x)-x^n$$

3. 证明:由于 $x^{51}+1=(x+1)(x^{50}-x^{49}+\cdots+x^2-x+1)$,

$$x^{51}-1=(x-1)(x^{50}+x^{49}+\cdots+x^2+x+1),$$

两式相乘得 $x^{102}-1=(x^2-1)f(x)$.
而 $x^{102}-1$ 与 x^2-1 中都不含奇数次项,因此 $f(x)$ 的展开式中也不含奇数次项.

4. 反证法,利用次数定理引出矛盾.

5. 解:(1) $f(x)=k$,其中 $k\in F$.

若不然,假设 $\partial^\circ(f(x))=n>0$,设 α 是 $f(x)$ 的根,由题设条件得 $f(\alpha-a)=f(\alpha)=0$,故 $\alpha-a$ 也是 $f(x)$ 的根,依此类推,$\alpha-2a,\alpha-3a,\cdots,\alpha-ma,\cdots$ 都是 $f(x)$ 的根,这与 $f(x)$ 只有 n 个根矛盾.

(2) $f(x)=0,1,x^n$.

由题设条件,$\forall a\in F$,都有 $f(a^2)=f^2(a)$. 若 $f(x)=k$,则 $k=k^2$,故 $k=0,1$,即 $f(x)=0,1$. 若 $\partial^\circ(f(x))=n>0$,由 $f(a^2)=f^2(a)$ 得 $f(x^2)=f^2(x)$. 设 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$,由 $f(x^2)=f^2(x)$ 比较系数可得 $a_n=1,a_i=0,i=0,\cdots,n-1$,故 $f(x)=x^n$.

6. 反证法. 由根的个数定理引出矛盾.

7. 证明:反证法. 假设 $f(x)$ 有 n 个实根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,由根与系数关系有

$$\begin{cases}-a_1=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n\\ a_2=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}\alpha_i\alpha_j.\end{cases}$$

则

$$(n-1)a_1{}^2-2na_2=(n-1)(\alpha_1{}^2+\cdots+\alpha_n{}^2+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\alpha_i\alpha_j)-2n\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\alpha_i\alpha_j$$
$$=(n-1)(\alpha_1{}^2+\cdots+\alpha_n{}^2)-2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\alpha_i\alpha_j=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\alpha_i-\alpha_j)^2\geqslant 0.$$

由 $a_1{}^2<\dfrac{2n}{n-1}a_2$ 得$(n-1)a_1{}^2-2na_2<0$,矛盾. 因此$f(x)$不可能有 n 个实根.

8. 证明:设 a 是$f(x)$的任意一个根,即$f(a)=0$. 由$f(x)\mid f(x^n)$得到 a 也是$f(x^n)$的根,即$f(a^n)=0$,这表明 a^n 也是$f(x)$的根. 依此类推,$a,a^n,a^{n^2},a^{n^3},\cdots$ 都是$f(x)$的根. 如果$f(x)$是 m 次多项式,则它最多只可能有 m 个不同的根,这表明存在正整数 $k>1$,使 $a^{n^k}=a^{n^l}$,即 $a^{n^l}(a^{n^k}-1)=0$,可见 a 或者为零,或者为单位根.

9. 利用因式定理及互素的性质证明.

10. 证明:由因式定理知 $x-a$ 是$p(x)$与$f(x)$的公因式,因而$p(x)$与$f(x)$不互素,又$p(x)$是不可约多项式,根据不可约多项式的性质知 $p(x)\mid f(x)$.

11. 证明:对所给的两式相加得$(x^2+1)(h(x)+l(x))+2x(f(x)+g(x))=0$,于是$(x^2+1)\mid 2x(f(x)+g(x))$,而$(x^2+1,2x)=1$,故$(x^2+1)\mid(f(x)+g(x))$. 两式相减,同理证得$(x^2+1)\mid(2f(x)+4g(x))$. 综合以上两条命题得证.

12. 利用 n 次单位根的性质,仿照例 6 证明.

13. 证明:由 $x-1\mid f(x^n)$ 得$f(1)=0$. 设

$$x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon_1)\cdots(x-\varepsilon_{n-1}),$$

则 $\varepsilon_i{}^n=1,i=1,2,\cdots,n-1$. 从而$f(\varepsilon_i{}^n)=f(1)=0$,即 ε_i 是$f(x^n)$的根,故 $x-\varepsilon_i\mid f(x^n)$. 又因为 $x-1,x-\varepsilon_1,\cdots,x-\varepsilon_{n-1}$ 两两互素,所以

$$(x-1)(x-\varepsilon_1)\cdots(x-\varepsilon_{n-1})\mid f(x^n),$$

即 $x^n-1\mid f(x^n)$.

14. 充分性显然,必要性用反证法.

15. 先证$(f(x)+2g(x),g(x))=1,(f(x)-2g(x),g(x))=1$,再由互素性质得出.

16. 解:(1) $(f(x),g(x)) = x + \frac{2}{3}$;

(2) $u(x) = -\frac{1}{3}(x^2 - x - 1)$, $v(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 2x^2 - 5x - 4)$.

17. 证明:(1)用定义法或运用整除证明左右两端相等.

(2)由于 $f(x) + (-x)g(x) = a_0 \neq 0$,利用(1)的结论得

$(f(x),g(x)) = (f(x) + (-x)g(x),g(x)) = (a_0,g(x)) = 1$.

18. 证明:作代换 $x = y + 1$,利用艾森斯坦判别法.

19. 反证法.

20. 证明:必要性由不可约多项式的性质易证. 充分性采用反证法.

21. 证明:必要性由不可约多项式的性质易证. 充分性采用反证法.

22. $f(x) = 7x(x-1)(x-2)(x-3) + 43x(x-1)(x-2) + 44x(x-1) + 8x - 9$.

(提示:对 $f(x)$ 及余式依次作综合除法,其除式分别为 $x, x-1, x-2, x-3$.)

23. $f(x)$ 在有理数域上不可约. 提示:当 $p = 3$ 时,$f(x)$ 无有理根;当 $p \neq 3$ 时,作代换 $x = y + 1$,利用艾森斯坦(Eisenstein)判别法.

24. 可求得 $(f(x),g(x)) = x^2 - 2x + 3$,故它们的公共根为 $1 \pm \sqrt{2}i$.

25. 可求得 $(f(x),f'(x)) = (x-1)^2$,所以1是 $f(x)$ 的3重根. 又由综合除法得 $f(x) = (x-1)^3(x^2+3x+6)$,故 $f(x)$ 的全部根为1,1,1,$\frac{-3 \pm \sqrt{15}i}{2}$.

26. 因为 $f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$,但 $f'''(1) \neq 0$,所以1为 $f(x)$ 的3重根.

第 2 章 行列式的计算方法和技巧

行列式是高等代数中的一个重要的研究对象,行列式的理论起源于解线性方程组,时至今日行列式不仅是求解线性方程组的有力工具,而且在求逆矩阵、求矩阵的秩、判断二次型的正定与负定、判断向量组的线性相关性、求矩阵的特征值、坐标变换、多重积分中的变量替换等方面都有广泛的应用. 然而这些应用最终都离不开行列式的计算,它是行列式理论中的一个重要问题. 因此本章重点讨论行列式的计算方法,总结归纳各类常用方法,以便从理论和技巧上更好地发挥它的作用.

2.1 内容提要

2.1.1 行列式的定义

1. 排列、逆序数、对换及其性质

n 个数码 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序组称为一个 n 阶排列,记为 $i_1i_2\cdots i_n, j_1j_2\cdots j_n$ 等. n 阶排列的总数是 $n!$.

在一个 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中,若一对数码的前后位置与其大小顺序相反,即前面的数大于后面的数,则称它们构成排列的一个**逆序**(**反序**). 一个排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**. 排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记为 $\pi(i_1i_2\cdots i_n)$.

逆序数为偶(奇)数的排列叫做**偶**(**奇**)**排列**. 在一个排列中,交换两个数码的位置,而其余的数码不动,就得到另一个排列,这种对排列所作的变换手续称为**对换**.

每一个对换都改变排列的奇偶性.

任意一个 n 阶排列与排列 $12\cdots n$ 都可以经过一系列对换互变,并且所作对换的个数与该排列的奇偶性相同.

$n\geqslant 2$ 时,n 个数码的奇排列与偶排列的个数相等,各为$\frac{n!}{2}$个.

2. n 阶行列式的定义

用符号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{2.1}$$

表示的 n 阶行列式指的是 $n!$ 项的代数和，这些项是一切可能的取自(2.1) 的不同的行与不同的列上的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$. 项 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号为$(-1)^{\pi(j_1j_2\cdots j_n)}$)，也就是说，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时，这一项的符号为正；当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时，这一项的符号为负. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}^{(-1)^{\pi(j_1j_2\cdots j_n)}} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

符号定理：若 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 是两个 n 阶排列，则 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 是 n 阶行列式(2.1) 的一项，且该项的符号是$(-1)^{\pi(i_1i_2\cdots i_n)+\pi(j_1j_2\cdots j_n)}$.

n 阶行列式也可以定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}^{(-1)^{\pi(j_1j_2\cdots j_n)}} a_{j_11}a_{j_22}\cdots a_{j_nn}.$$

n 阶行列式的两种定义等价. 上面的 n 阶行列式也可简记为 $D=|a_{ij}|$，i,j 分别叫做元素 a_{ij} 的行、列指标. 一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$，二、三阶行列式还可以按对角线法则进行计算，但计算三阶以上的行列式不能采用对角线法则.

2.1.2 行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等. 此性质说明，行列式的行与列处于完全平等的地位，即对行成立的性质，对列也同样地成立.

性质 2 交换一个行列式的两行(列)，行列式改变符号. 由此得：若一个行列式有两行(列)完全相同，则这个行列式等于零.

性质3　把一个行列式的某一行(列)的所有元素同乘以某一个数 k,等于以 k 乘这个行列式.由此可得三个推论:

(1)一个行列式中某一行(列)所有元素的公因子可以提到行列式符号的外边.

(2)若行列式中有一行(列)的元素全都是零,则此行列式等于零.

(3)若行列式有两行(列)的对应元素成比例,则此行列式等于零.

性质4　设行列式 D 的第 i 行的所有元素都可以表成两项的和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

那么 $D=D_1+D_2$,其中 D_1 的第 i 行的元素是 $b_{i1},b_{i2},\cdots,b_{in}$,$D_2$ 的第 i 行的元素是 $c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{in}$,而 D_1 与 D_2 的其它各行都和 D 的一样.

注1　同样的性质对于列来说也成立.对于行列式第 i 行的各元素都是 s 项之和的情况,则它等于 s 个行列式之和(单行可加性).

注2　如果 n 阶行列式的各元素都是两项之和,则它可以分解成 2^n 个行列式之和.

性质5　把行列式的某一行(列)的元素乘以同一数后加到另一行(列)的对应元素上,行列式不变.

为做题时描述方便,引入下列记号:

(1) $r_i \div k$(或 $c_i \div k$) 表示第 i 行(列) 提出公因子 k;

(2) r_i+kr_j(或 c_i+kc_j) 表示将第 j 行(列) 的 k 倍加到第 i 行(列);

(3) $r_i \leftrightarrow r_j$(或 $c_i \leftrightarrow c_j$) 表示交换第 i 行(列) 和第 j 行(列)的位置;

(4) $r_{i_1}+r_{i_2}+\cdots+r_{i_n}$(或 $c_{i_1}+c_{i_2}+\cdots+c_{i_n}$) 表示把第 $i_2,\cdots,i_n$ 行(列) 都加到第 i_1 行(列)上.

2.1.3　行列式的展开定理

1. 子式、余子式、代数余子式

在一个 n 阶行列式 D 中任意取定 k 行和 k 列($k \leqslant n$),位于这些行

列相交处的 k^2 个元素按照原来的次序所构成的 k 阶行列式 M 叫做行列式 D 的**一个 k 阶子式**.

$n(n>1)$ 阶行列式 D 的某**一元素 a_{ij} 的余子式** M_{ij} 指的是在 D 中划去 a_{ij} 所在的行和列后所余下的 $n-1$ 阶子式；a_{ij} 的余子式 M_{ij} 前面加上符号 $(-1)^{i+j}$ 后，叫做**元素 a_{ij} 的代数余子式**，记为 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

设 M 是 $n(n>1)$ 阶行列式 D 的一个 k 阶子式，在 D 中划去这 k 行和 k 列后余下的元素按照原来的次序所构成的 $n-k$ 阶子式 M' 叫做**子式 M 在 D 中的余子式**. 设 D 的 k 阶子式 M 在 D 中所在的行、列指标分别是 $i_1,i_2,\cdots,i_k;j_1,j_2,\cdots,j_k$，则 M 的余子式 M' 前面加上符号 $(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}$ 后叫做**子式 M 的代数余子式**.

由此可知，元素的余子式、代数余子式是子式的余子式、代数余子式的特例.

2. 行列式按一行(列)展开

行列式 $D=|a_{ij}|$ 等于它的任意一行(列)的所有元素与它们的对应代数余子式的乘积的和；行列式 D 某一行(列)的元素与另外一行(列)的对应元素的代数余子式的乘积之和等于零. 即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}D, i=j;\\0, i\neq j.\end{cases}(n\geqslant 2).$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=\begin{cases}D, i=j;\\0, i\neq j.\end{cases}(n\geqslant 2).$$

3. 行列式按若干行(列)展开

拉普拉斯(Laplace)定理：设在行列式 D 中任意取定了 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 个行(列)，由这 k 行(列)元素所组成的一切 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积的和等于行列式 D.

特别地，当 $k=1$ 时，那么由这取定的一行(列)元素所组成的 n 个一阶子式与它们的代数余子式的乘积的和等于行列式 D. 这结论恰好是行列式依行(列)展开公式的结果.

4. 行列式的乘法规则(定理)

两个 n 阶行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=|A|, D_2=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}=|B|.$$

的乘积等于一个 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}=|AB|=|C|,$$

其中 c_{ij} 是 D_1 的第 i 行元素分别与 D_2 的第 j 列的对应元素乘积之和，即

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}, i,j=1,2,\cdots,n.$$

注 1　这一乘法规则的意义正是矩阵乘积的行列式等于它的每一因子的行列式的乘积.

注 2　这一乘法规则符合两个矩阵乘法规则，但两者意义不一样，前者是同阶行列式之积，后者是同阶矩阵之积.

注 3　这个乘法规则通常称为“行乘列”，但由于行列式与其转置行列式相等，故有

$$D=D_1\cdot D_2=D_1\cdot D_2^T=D_1^T\cdot D_2=D_1^T\cdot D_2^T,$$

所以还有“行乘行”、“列乘行”、“列乘列”之说，即行列式的乘法规则共有四种.

2.1.4　几类特殊行列式

1. 三角行列式

上三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1n-1}a_{nn}$；

下三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1n-1}a_{nn}.$

2. 次三角行列式

次上三角行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n-12}a_{n1};$

次下三角行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-12} & \cdots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n-12}a_{n1}.$

3. 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

4. 范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

2.1.5 Cramer 法则

如果一个含有 n 个未知量 n 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{2.2}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0,$$

那么线性方程组(2.2)有解,并且解是惟一的,解可以通过系数表示为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, x_2 = \frac{D_2}{D}, \cdots, x_n = \frac{D_n}{D} \tag{2.3}$$

其中 D_j 是把行列式 D 的第 j 列的元素换成方程组的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 而得到的 n 阶行列式.

2.1.6　分块行列式

1. 分块行列式及性质

分块行列式指的是在一个 n 阶行列式的行列之间用一些横线与竖线,把它分成若干个小块(矩阵)的行列式.

设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 分别是 m 阶阵与 n 阶阵(m 与 n 未必相等),C 是 $m \times n$ 阵,则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ 0 & \boldsymbol{B} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}|.$$

若以非零矩阵左(右)乘分块行列式的某一行(列)加到另一行(列)上去,则得到的新的分块行列式与原分块行列式相等.

2. 行列式的降阶定理

第一降阶定理:设 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$ 是方阵,且 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵,则

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{D} - \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}|.$$

注　若方阵$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$中的$D$为可逆矩阵,则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D| \cdot |A - BD^{-1}C|.$$

它是第一降阶定理的另一种形式.

由此得它的两个推论:

推论 1　设A与D分别是m阶可逆矩阵与n阶矩阵,B与C分别是$m \times n$阵与$n \times m$阵,则

$$|D - CA^{-1}B| = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}.$$

此推论常称为**升阶公式**.

推论 2　设A,B,C,D为同阶方阵,若A为可逆矩阵,且$AC = CA$,则

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

第二降阶定理:设A与D分别是m阶可逆矩阵与n阶可逆矩阵,B与C分别是$m \times n$阵与$n \times m$阵,则

$$|D - CA^{-1}B| = \frac{|D|}{|A|} \cdot |A - BD^{-1}C|,$$

$$|D + CA^{-1}B| = \frac{|D|}{|A|} \cdot |A + BD^{-1}C|.$$

2.2　重点和难点

本章的重点是:行列式的性质,行列式的计算,*Cramer* 法则.

行列式的性质是行列式理论的基础和主要部分,是计算行列式的依据,也是应用行列式解决其它问题的依据,因此,行列式的性质成为本章的一个重点.

行列式作为一种工具应用于数学的某些分支及其它的学科,多数情况下是计算行列式,所以,行列式的计算是本章的核心问题. 同时,通

过行列式的计算,反过来可以进一步认识行列式性质的重要性,并且,可以更加深刻地理解行列式性质的实质. 因此,行列式的计算成为本章的一个重点. 要求熟练正确地计算低阶行列式,也应会计算一些特殊形式的 n 阶行列式. 行列式的计算技巧性很强,虽然有某些较为一般的方法供参考和使用,但是,具体问题具体分析仍是关键所在.

Cramer 法则是行列式理论的一个直接应用. 行列式起源于解线性方程组,换一句话说,它起源于推广二元线性方程组的 *Cramer* 法则到 n 元的情况;而且没有行列式的一系列理论,要证明 *Cramer* 法则是不可能的,所以,就一定意义而言,行列式理论的发生及归宿就是 *Cramer* 法则. 此外,*Cramer* 法则自身也具有重要的理论与实践意义. 于是 *Cramer* 法则成为本章的一个重点.

本章的难点是:行列式的定义,行列式的展开定理,行列式的计算.

n 阶行列式的定义是抽象的,由于 n 是一般的自然数,所以,行列式的记号、项、排列等采用了省略号的写法,这在形式上就不大习惯;同时,又要以排列及排列的逆序为基础,$n!$ 项与排列紧密相关,从而比较难以理解其实质. 因而,成为本章的一个难点. 解决这一难点的方法是:(1)分析二阶、三阶行列式的所有项,从而总结出基本规律,为 n 阶行列式的定义打好基础;(2)强调行列式的本质就是用特定符号表示的一个数,该数是 $n!$ 项的代数和,这个代数和中的每一项不仅与构成行列式的 n^2 个元素有关,而且与这些元素的排列位置有关;(3)通过计算某些特殊行列式(例如对角、三角行列式),加深对于项的取法及确定项的符号等的理解.

行列式的展开定理是行列式的更深刻的性质. 建立展开定理要用到子式、余子式、代数余子式的概念;证明展开定理要用到行列式的定义及已有的性质,并有一定的技巧;所以,综合性较强. 因此,成为本章的一个难点. 解决这一难点的方法是:(1)先用三阶行列式展为二阶行列式的例子,熟悉展开定理;(2)正确理解代数余子式的概念;(3)将证明分为几种情况,由特殊到一般来完成证明.

行列式的计算,既是本章的一个重点,又是本章的一个难点. 行列式多种多样,没有一般的计算方法,于是计算行列式需要很强的技巧.

因此，成为本章的一个难点．解决这一难点的方法是：(1)明确基本思想是化零，方向是化三角形法和降阶法；(2)计算之前要认真观察行列式的特点，一般地，着重观察行的特点、列的特点、对角线的特点，然后根据其特点作化零试验；(3)熟悉一些较基本的方法(如行和法或列和法、升阶法、分拆法、递推法、归纳法、换元法、利用范德蒙德行列式的结论、提取因子法等)及典型例子，从而开阔思路；(4)多做题并注意总结，从而不断提高分析能力与应变能力．

2.3　例题解析

2.3.1　排列的逆序数及奇偶性

解决此类问题只需掌握排列的逆序数的计算方法及排列奇偶性的定义即可．

例1　计算 $2n$ 阶排列 $135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$ 的逆序数，并确定其奇偶性．

解　$\pi(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n))=0+(n-1)+0+(n-2)+\cdots+0+1+0+0=\dfrac{n(n-1)}{2}$.

当 $n=4k,4k+1$ 时为偶排列；当 $n=4k+2,4k+3$ 时为奇排列．

例2　证明 $\pi(i_1i_2\cdots i_n)=\dfrac{1}{2}n(n-1)-\pi(i_ni_{n-1}\cdots i_1)$.

解　由于 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 中任意两个不同的数 i_k 与 i_j 必在排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 或 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 中构成逆序，而且只能在其中的一个构成逆序，所以这两个排列逆序数的和 $\pi(i_1i_2\cdots i_n)+\pi(i_ni_{n-1}\cdots i_1)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\dfrac{1}{2}n(n-1)$，从而问题得证．

2.3.2　确定行列式的项及项的符号

根据行列式的定义，可以确定行列式的具有某些性质的项，也可以确定项的符号．

例3　选择 i 与 j，使 $a_{3i}a_{12}a_{41}a_{6j}a_{25}a_{53}$ 成为6阶行列式的一个带负

号的项.

解　由于 $a_{3i}a_{12}a_{41}a_{6j}a_{25}a_{53} = a_{12}a_{25}a_{3i}a_{41}a_{53}a_{6j}$,故只需使 $25i13j$ 成为一个 6 阶奇排列. 若取 $i = 4, j = 6$,则所得排列的逆序为 6,是偶排列,该项应带正号. 因为对换改变排列的奇偶性,所以,取 $i = 6, j = 4$ 时,则该项带负号.

2.3.3　行列式的常用计算方法

由于行列式的计算,特别是以字母为元素的行列式的计算,没有一般的方法,在这里主要介绍对一些特殊类型的行列式给出一些不同的计算方法.

1. **定义法**

应用 n 阶行列式的定义来计算或证明的方法,称为定义法. 有的行列式利用定义直接计算反而简单,此法适用于行列式中有较多零元素的情形.

例 4　计算 $D_5 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 & 0 \\ a_{51} & 0 & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix}$

解　由行列式的定义知

$$D_5 = \sum_{j_1j_2\cdots j_5} (-1)^{\pi(j_1j_2\cdots j_5)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{5j_5}.$$

因为 $a_{22} = a_{24} = a_{25} = 0$,所以非零元素中,$j_2$ 只能取 1 或 3. 同理由 $a_{42} = a_{44} = a_{45} = a_{52} = a_{54} = a_{55} = 0$,因而 j_4 与 j_5 也只能取 1 或 3,又因 j_2, j_4, j_5 各不相同,故元素 $a_{2j_2}, a_{4j_4}, a_{5j_5}$ 中至少有一个必须取零,于是 $D_5 = 0$.

显然,本例可直接用拉普拉斯定理.

例 5　设 $D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

其中 $b \neq 0$，证明 $D_1 = D_2$.

证明　由行列式的定义，

$$D_1 = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\pi(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n},$$

$$D_2 = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\pi(i_1 i_2 \cdots i_n)} (a_{1i_1} b^{1-i_1})(a_{2i_2} b^{2-i_2}) \cdots (a_{ni_n} b^{n-i_n}).$$

而
$$D_2 = \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\pi(i_1 i_2 \cdots i_n)} (a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}) b^{(1+2+\cdots+n)-(i_1+i_2+\cdots+i_n)}.$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\pi(i_1 i_2 \cdots i_n)} (a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n}) b^0 = D_1.$$

例 6　证明 2005 阶行列式

$$D_{2005} = \begin{vmatrix} 1 & 2^2 & 3^3 & \cdots & 2005^{2005} \\ 2 & 3^2 & 4^3 & \cdots & 2006^{2005} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2004 & 2005^2 & 2006^3 & \cdots & 2006^{2005} \\ 2005 & 2006^2 & 2006^3 & \cdots & 2006^{2005} \end{vmatrix} \neq 0.$$

证明　由行列式的定义知

$D_{2005} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_{2005}} (-1)^{\pi(j_1 j_2 \cdots j_{2005})} a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_{2005} 2005}$，当 $\pi(j_1 j_2 \cdots j_{2005}) = \pi(2005, 2004, \cdots, 2, 1)$ 时，相应项含有 2005 的幂，此项为奇数，而其余各项都含有 2006 的幂，因而这些项都是偶数，于是 D_{2005} 是个奇数，故 $D_{2005} \neq 0$.

例 7　设 $n(n > 2)$ 阶行列式 D 的所有元素或为 1 或为 -1，求证：D 的绝对值 $|D| \leqslant (n-1)!(n-1)$.

证明　用数学归纳法证之.

当 $n = 3$ 时，D 的展开式共有 6 项，而每一项的绝对值都等于 1，所以 $|D| \leqslant 6$. 其次，由于 D 的一行加到另一行后，得一全是偶数的行，所以 D 是偶数. 因此，只要证明 $D \neq \pm 6$ 即可.

先证明 $D \neq 6$. 因为 3 阶行列式的展开式共有 6 项：$a_{11}a_{22}a_{33}$，$a_{12}a_{23}a_{31}$，$a_{13}a_{21}a_{32}$ 和 $-a_{11}a_{23}a_{32}$，$-a_{12}a_{21}a_{33}$，$-a_{13}a_{22}a_{31}$，假若 $D = 6$，则这六项全等于 1，从而，前三项的乘积与后三项的乘积都是 1，即

$$(a_{11}a_{22}a_{33}) \cdot (a_{12}a_{23}a_{31}) \cdot (a_{13}a_{21}a_{32}) = 1,$$

$$(-a_{11}a_{23}a_{32})(-a_{12}a_{21}a_{33})(-a_{13}a_{22}a_{31})=1,$$

引出矛盾,因此 $D\neq 6$. 同理可证 $D\neq -6$,故得 $|D|\leqslant 4=(3-1)!(3-1)$.

假定结论对 $n-1$ 阶行列式正确. 将 D 按第一列展开：

$$|D|=|a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}|.$$

因为 $a_{i1}=\pm 1$,故

$$\begin{aligned}|D|&\leqslant |A_{11}|+|A_{21}|+\cdots+|A_{n1}|\\&\leqslant n(n-2)!(n-2)<(n-1)!(n-1).\end{aligned}$$

2. 三角形法

三角形法就是利用行列式的性质(使其形变值不变),把原行列式化为上(下)三角形行列式来计算的一种方法,于是原行列式等于变换后的上(下)三角形行列式的主对角线元素之积. 利用行列式的性质对其进行恒等变形时,经常用下列方法：

(1)所有各行(列)加到同一行(列);

(2)把某一行(列)的倍数加到其余各行(列);

(3)逐行(列)相加.

通过以下例题,大家可以体会到行列式的各种恒等变形在计算行列式时所起的重要作用.

对于形如

$$\begin{vmatrix} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & \iddots & \vdots \\ & \iddots & & \vdots \\ \iddots & & & \vdots \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vdots & & & \iddots \\ \vdots & & \iddots & \\ \vdots & \iddots & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \ddots & & & \vdots \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \end{vmatrix}$$

的所谓箭形(或爪形)行列式,可直接利用行列式的性质将其一条边化为零,从而化为三角或次三角行列式进行计算.

例 8　计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix},\text{其中 } a_1a_2\cdots a_n\neq 0.$$

解

$$D=\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix} \xlongequal{r_i-r_1,i=2,\cdots,n,c_i\div a_i}$$

$$(a_1a_2\cdots a_n)\begin{vmatrix} \frac{x_1}{a_1}-1 & \frac{x_2}{a_2} & \frac{x_3}{a_3} & \cdots & \frac{x_n}{a_n} \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n}$$

$$(a_1a_2\cdots a_n)\begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i}-1 & \frac{x_2}{a_2} & \frac{x_3}{a_3} & \cdots & \frac{x_n}{a_n} \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(a_1a_2\cdots a_n)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i}-1\right).$$

例 9　计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & \cdots & x & a_n \end{vmatrix}$，其中 $a_i\neq x$.

解　$$D = \begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x & x \\ x & a_2 & \cdots & x & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & a_{n-1} & x \\ x & x & \cdots & x & a_n \end{vmatrix} \underline{\underline{r_i - r_1, i = 2, \cdots, n}}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x & x \\ x - a_1 & a_2 - x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x - a_1 & 0 & \cdots & a_{n-1} - x & 0 \\ x - a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_n - x \end{vmatrix} \underline{\underline{c_i \div (a_i - x), i = 1, 2, \cdots, n}}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i - x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1 - x} & \frac{x}{a_2 - x} & \cdots & \frac{x}{a_{n-1} - x} & \frac{x}{a_n - x} \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \underline{\underline{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}}$$

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i - x) \begin{vmatrix} \frac{a_1}{a_1 - x} + \sum_{i=2}^{n} \frac{x}{a_i - x} & \frac{x}{a_2 - x} & \frac{x}{a_3 - x} & \cdots & \frac{x}{a_n - x} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= x\prod_{i=1}^{n}(a_i - x)\left(\frac{1}{x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i - x}\right).$$

请读者尝试用其它方法解例8和例9.

3. 行(列)和法

若一个行列式各行(列)的和相等,则可以将这些行(列)加起来,提取公因子后往往可以计算出行列式的值来,这种计算行列式的方法叫做行(列)和法.

在例 8 中，如果 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ 时，该行列式变为

$$D = \begin{vmatrix} x_1 - a & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3 - a & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n - a \end{vmatrix}.$$

这个行列式各列之和都是同一元素，可用列和法来解，留给读者来完成.

在例 9 中，如果 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ 时，此行列式还可以怎样计算？

例 10 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$.

解

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 + r_2 + \cdots + r_n, r_1 \div [\frac{1}{2}n(n+1)]}$$

$$[\frac{1}{2}n(n+1)] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} \xlongequal{c_i - c_1, i = 2, \cdots, n}$$

$$\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & \cdots & -2 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & 1 & 2-n & \cdots & -2 & -1 \\ n & 1-n & 2-n & \cdots & -2 & -1 \end{vmatrix}.$$

$$=\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-2 & -1 \\ 1 & 2 & \cdots & -2 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2-n & \cdots & -2 & -1 \\ 1-n & 2-n & \cdots & -2 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_i - r_{n-1},\, i=1,\cdots,n-2}$$

$$\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]\begin{vmatrix} n & n & \cdots & n & 0 \\ n & n & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1-n & 2-n & \cdots & -2 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \cdot \frac{n+1}{2} \cdot n^{n-1}.$$

4. 降阶法

降阶是计算行列式的一个基本思想，通常运用依行(列)展开公式、拉普拉斯定理、分块行列式的降阶定理等进行计算.

对于形如

$$\begin{vmatrix} \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots \\ \bullet & & \ddots \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \ddots & & \bullet \\ \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} & \iddots & \iddots \\ \iddots & \iddots & \\ \iddots & & \bullet \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \bullet & & \iddots \\ & \iddots & \iddots \\ \iddots & \iddots & \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \ddots & & \bullet \\ & \ddots & \\ \bullet & & \ddots \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} \bullet & & \iddots \\ & \iddots & \\ \iddots & & \bullet \end{vmatrix}.$$

的所谓两条线行列式，可直接展开降阶，再利用三角或次三角行列式进行计算.

例 11 设 A 与 B 为同阶方阵，证明：$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A+B| \cdot |A-B|$.

证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 + I \cdot r_2} \begin{vmatrix} A+B & B+A \\ B & A \end{vmatrix} \xlongequal{c_2 + c_1 \cdot (-I)} \begin{vmatrix} A+B & 0 \\ B & A-B \end{vmatrix}$$

$$= |A+B| \cdot |A-B|.$$

例 12　设 $u = (u_1, u_2, \cdots, u_n)'$ 为 n 维实列向量，且满足 $u'u = 1$，称 n 阶矩阵 $I_n - 2uu'$ 为实镜像阵. 证明：$| I_n - 2uu' | = -1$.

证明　根据第二降阶定理，

$$| I_n - 2uu' | = | I_n - (2u)I_1^{-1}u' | = \frac{| I_n |}{| I_1 |} | I_1 - u'I_n^{-1}(2u) |$$

$$= | I_1 - 2u'u | = | 1 - 2 | = -1.$$

试用升阶法给出本例的另一种算法.

5. 升阶法(加边法)

把 n 阶行列式适当地添加 $m(m \geq 1)$ 行 m 列，使得到的 $n+m$ 阶行列式与原行列式相等，而且升阶后的行列式易于计算，进而求出原 n 阶行列式. 此法也称加边法. 计算行列式通常用降阶法，但有时候也可反其道而行之. 升阶法常常用于一些“缺少”某行(列)的行列式，加上适当的行列后反而可以简化问题，但此法的技巧性很强. 下面举两个典型的例子.

例 13　计算 n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_n \\ a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, \text{其中 } a_1 \cdots a_n \neq 0.$$

解　将行列式升阶为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & a_1 + a_2 & \cdots & a_1 + a_n \\ 0 & a_2 + a_1 & 0 & \cdots & a_2 + a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_n + a_1 & a_n + a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_i - r_1, i = 2, \cdots, n+1}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}.$$

再将这个 $n+1$ 阶行列式升阶为

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix} \xlongequal{c_i - c_1, i = 3, \cdots, n+2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}.$$

$$\xlongequal[c_2 - \frac{1}{2a_1}c_3 - \cdots - \frac{1}{2a_n}c_{n+2}]{c_1 + \frac{1}{2}c_3 + \cdots + \frac{1}{2}c_{n+2},} \begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i & 1-\frac{n}{2} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}.$$

$$= (-2)^n a_1 a_2 \cdots a_n \begin{vmatrix} 1-\frac{n}{2} & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i & 1-\frac{n}{2} \end{vmatrix}$$

$$= (-2)^{n-2}a_1a_2\cdots a_n[(n-2)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}\sum_{j=1}^{n} a_j].$$

本例用了两次升阶，可见，有时把行列式的阶数增高反而容易求出行列式的值. 下面用降阶法给出本例的另一种算法.

另解

$$D = \left|\begin{pmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1+a_1 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & a_2+a_2 & \cdots & a_2+a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & a_n+a_n \end{pmatrix}\right|.$$

$$= \left|\begin{pmatrix} -2a_1 & & & \\ & -2a_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -2a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} I_2^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\right|.$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} -2a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -2a_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}$$

$$\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & -2a_n \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}\right|.$$

$$= (-2)^n a_1\cdots a_n \begin{vmatrix} 1-\dfrac{n}{2} & -\dfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^{-1} \\ -\dfrac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_j. & 1-\dfrac{n}{2} \end{vmatrix}$$

$$= (-2)^{n-2}a_1a_2\cdots a_n[(n-2)^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i^{-1}\sum_{j=1}^{n} a_j].$$

由此可见，利用降阶法计算此行列式比较简捷.

例 14　计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$.

解　将行列式升阶为

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} \overset{c_i-c_1}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

将第一行拆开，得

$$D=\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} \overset{c_i-c_{i-1},\, i=n,\cdots,2}{=\!=\!=\!=\!=\!=}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1-1 & x_1(x_1-1) & \cdots & x_1^{n-1}(x_1-1) \\ 1 & x_2-1 & x_2(x_2-1) & \cdots & x_2^{n-1}(x_2-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n-1 & x_n(x_n-1) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

$$=[2x_1x_2\cdots x_n-(x_1-1)(x_2-1)\cdots(x_n-1)]\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

运用升阶法时一定要根据行列式的特点添加适当行和列.

6. 分拆法

利用行列式的性质可将一个行列式分解为两个或多个行列式之和(或之积)来计算，此法也叫分解之和(积)法. 用这种方法计算行列式有时会收到很好的效果. 事实上，在例 14 中已经使用了分解之和法. 下面是另一个例子.

例 15　计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$，$(n>2)$.

解法 1　将 D 关于第 1 列拆成 2 个行列式之和，再将这两个行列式按第 2 列拆成 2^2 个行列式之和，如此进行下去，D 拆成 2^n 个行列式之和. 在这些行列式中，每个行列式都至少有两列相同或成比例，其值均为零，因此 $D=0$.

解法 2
$$D=\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=0.$$

解法 3　将 D 的第 2、3 列都减去第 1 列，此时 D 的第 2 列和第 3 列成比例，故 $D=0$.

此例也可用升阶法计算，请读者完成.

由此可见，同一行列式的计算方法是多种多样的，因此要根据行列式的特点灵活地采取适当的方法.

例 16　设 x 是一个参数，
$$D(x)=\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix},$$
求证：$D(x)=D(0)+x\sum\limits_{i,j=1}^{n}A_{ij}$，其中 A_{ij} 是 a_{ij} 在 $D(0)$ 中的代数余子式.

证明　将行列式第一列拆成二列再展开：
$$D(x)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21} & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix},$$

上式中的右边行列式用 -1 乘以第一列加到后面的列上去,得到:

$$\begin{vmatrix} x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ x & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & a_{n2} & \cdots & a_{na} \end{vmatrix} = x(A_{11}+A_{21}+\cdots+A_{n1}).$$

再对另一个行列式第二列拆成二列展开,这样做下去就可得到结论.

请读者尝试用升阶法证之.

例 17　计算 4 阶行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ -a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}$.

解　根据行列式乘法定理得

$$D_4^2 = D_4 \cdot D_4^T = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & a_1 & -a_4 & a_3 \\ -a_3 & a_4 & a_1 & -a_2 \\ -a_4 & -a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & a_1 & a_4 & -a_3 \\ a_3 & -a_4 & a_1 & a_2 \\ a_4 & a_3 & -a_2 & a_1 \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^4 a_i^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum_{i=1}^4 a_i^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=1}^4 a_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum_{i=1}^4 a_i^2 \end{vmatrix} = (\sum_{i=1}^4 a_i^2)^2$$

所以 $D_4 = \pm(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)$. 根据行列式定义可知,$D_4$ 的展开式中有一项为 $(-1)^{\pi(1234)} a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = a_1^4$,故得 $D_4 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2$.

7. 递推法和数学归纳法

递推法的常用步骤是:按行或列展开行列式,使行列式降阶,比较

原行列式和降阶后的行列式的异同，找出递推关系. 如果降阶一次仍看不出关系，可再降一次试试. 从递推式求一般式往往需要一定的技巧，比如例 18 和例 19 都需要相当的技巧，读者可细心体会. 数学归纳法也是一种常用的方法，本质上也是一种递推法. 许多问题用数学归纳法证明往往比较简单，但它必须事先知道结论，因此有时可以先猜出结论，然后用归纳法证明它.

对于形如

$$\begin{vmatrix} \ddots & & \iddots \\ & \ddots \iddots & \\ \iddots & & \ddots \end{vmatrix}.$$

的所谓的两条线行列式，可直接展开得到递推公式；对于形如

$$\begin{vmatrix} \ddots & \ddots & & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} & & \iddots & \iddots \\ & \iddots & \iddots & \iddots \\ \iddots & \iddots & \iddots & \\ \iddots & \iddots & & \end{vmatrix}.$$

的所谓三对角行列式或次三对角行列式，按第 1 行(列)或第 n 行(列)展开得到两项的递推关系式，再利用变形递推的技巧求解.

例 18 计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}$.

解 将 D_n 按第一行展开，得 $\quad D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}$.　　(1)

把(1)式改写为 $\quad D_n - aD_{n-1} = b(D_{n-1} - aD_{n-2})$，

对 D_{n-1} 按第一行展开，同样可得 $\quad D_{n-1} - aD_{n-2} = b(D_{n-2} - aD_{n-3})$，

将此式代入前式得 $\quad D_n - aD_{n-1} = b^2(D_{n-2} - aD_{n-3})$，

如此继续下去得 $\quad D_n - aD_{n-1} = b^{n-2}(D_2 - aD_1)$，

因为 $\quad D_1 = a+b, D_2 = \begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix} = a^2 + ab + b^2$，

故
$$D_n - aD_{n-1} = b^n. \tag{2}$$

由于 a 与 b 的对称性,因此同样有　$D_n - bD_{n-1} = a^n$.　(3)

若 $a \neq b$,由(2),(3)两式解得　$D_n = \dfrac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$;

若 $a = b$,由递推关系式　$D_n = a^n + aD_{n-1}$,得 $D_n = (n+1)a^n$.

例19　计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & y \\ z & x_2 & y & \cdots & y & y \\ z & z & x_3 & \cdots & y & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & y \\ z & z & z & \cdots & z & x_n \end{vmatrix}$.

解　$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & y+0 \\ z & x_2 & y & \cdots & y & y+0 \\ z & z & x_3 & \cdots & y & y+0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & y+0 \\ z & z & z & \cdots & z & y+(x_n-y) \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & y \\ z & x_2 & y & \cdots & y & y \\ z & z & x_3 & \cdots & y & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & y \\ z & z & z & \cdots & z & y \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} x_1 & y & y & \cdots & y & 0 \\ z & x_2 & y & \cdots & y & 0 \\ z & z & x_3 & \cdots & y & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ z & z & z & \cdots & z & x_n - y \end{vmatrix} \xlongequal{r_i - r_n,\, i=1,\cdots,n-1}$$

$$\begin{vmatrix} x_1-z & y-z & y-z & \cdots & y-z & 0 \\ 0 & x_2-z & y-z & \cdots & y-z & 0 \\ 0 & 0 & x_3-z & \cdots & y-z & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1}-z & 0 \\ z & z & z & \cdots & z & y \end{vmatrix} + (x_n-y)D_{n-1}.$$

$$= (x_n-y)D_{n-1} + y\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-z).$$

对 D_n 转置同样有　　$D_n = (x_n-z)D_{n-1} + z\prod_{i=1}^{n-1}(x_i-y)$.

若 $y \neq z$,解得　　$D_n = \dfrac{1}{z-y}\left[z\sum_{i=1}^{n}(x_i-y) - y\sum_{i=1}^{n}(x_i-z)\right]$;

若 $y = z$,由递推得　　$D_n = x_1\sum_{i=2}^{n}(x_i-y) + y\sum_{i=2}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}(x_j-y)$.

例 20　计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -x_1 & x_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & -x_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -x_{n-1} & x_n \end{vmatrix}$.

解　$D_1 = a_1+x_1 = x_1\left(1+\dfrac{a_1}{x_1}\right)$, $D_2 = \begin{vmatrix} a_1+x_1 & a_2 \\ -x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_1x_2\left(1+\dfrac{a_1}{x_1}+\dfrac{a_2}{x_2}\right)$.

由此推测

$$D_n = x_1x_2\cdots x_n\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n}{x_n}\right).$$

下面对 n 用数学归纳法证明这一结论.

当 $n = 1,2$ 时,推测结论成立;

假定 $n = k$ 时,推测结论成立,即

$$D_k = x_1x_2\cdots x_k\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\cdots+\frac{a_k}{x_k}\right).$$

那么,当 $n=k+1$ 时,将按最后一列展开得

$$D_{k+1}=x_{k+1}D_k+(-1)^k a_{k+1}(-x_1)(-x_2)\cdots(-x_k)$$

$$=x_1x_2\cdots x_{k+1}\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\cdots+\frac{a_k}{x_k}\right)+x_1x_2\cdots x_k a_{k+1}$$

$$=x_1x_2\cdots x_{k+1}\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\cdots+\frac{a_{k+1}}{x_{k+1}}\right).$$

即 $n=k+1$ 时推测结论也成立. 故对一切自然数 n, D_n 的推测结论是成立的. 所以得

$$D_n==x_1x_2\cdots x_n\left(1+\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+\cdots+\frac{a_n}{x_n}\right).$$

8. 提取因子法

在含有文字变量(单项式或多项式)的行列式中,如果某个变量取某个特定值时行列式值为零,则该行列式必含有某个特定的因子. 用**这种方法**常常可以巧妙地将行列式的值求出来.

例 21　计算 4 阶行列式 $D=\begin{vmatrix}1+x & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1-x & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1+y & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1-y\end{vmatrix}$.

解　显然当 $x=0,y=0$ 时 $D=0$,因此 D 含有因子 xy. 若将 $-x$ 代 x,得到的行列式仍和 D 相等(只要将第 1、2 行对换,再将第 1、2 列对换). 可见,D 含有因子 x^2,同理 D 含有因子 y^2. 而 x^2y^2 的系数是 1,故 $D=x^2y^2$.

例 22　设 $f_i(x)$, $i=1,2,\cdots,n$ 是次数不大于 $n-2(n>1)$ 的多项式,$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是任意数,证明

$$D=\begin{vmatrix}f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n)\\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n)\end{vmatrix}=0.$$

证明　当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有两个数相等时,显然 $D=0$. 当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 两两不等时,作 n 阶行列式

$$g(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(x) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_n(x) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix},$$

可见 $g(x)$ 是次数不大于 $n-2$ 的多项式，因为 $g(a_2)=g(a_3)=\cdots=g(a_n)=0$，故 $g(x)$ 至少有 $n-1$ 个不同的根，从而 $g(x)$ 为零次多项式，因而 $g(a_1)=0$，即 $D=0$.

9. 利用 Vandermonde 行列式的计算法

某些行列式（通常是文字行列式）可以归结为 Vandermonde 行列式来计算，但需要一定的技巧. 例 14 中已经涉及这种方法，下面再举一例，也许读者可以从中得到启发.

例 23　计算 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$.

解　注意这个行列式和 Vandermonde 行列式的区别在于它们的最后一列. 现用升阶法使之成为 Vandermonde 行列式

$$B=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & y & y^2 & \cdots & y^{n-1} & y^n \end{vmatrix},$$

可将 $n+1$ 阶的行列式 B 看成 y 的多项式. 只需求出 y^{n-1} 的系数即可解出行列式 D.

因为　$B=(y-x_1)(y-x_2)\cdots(y-x_n)\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$，

则 y^{n-1} 的系数是　$-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$.

而 B 中元素 y^{n-1} 的代数余子式为 $(-1)^{n+1+n}D=-D$，因此

$$D=(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

10. 换元法

用同一个元素 x 加到 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 中每一元素上得到一个新 n 阶行列式 $\overline{D}=|a_{ij}+x|$，由例16可知

$$\overline{D}=D+x\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}\ ,\tag{2.4}$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 在 D 中的代数余子式.

一般地，用 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 分别加到 $D=|a_{ij}|$ 中第 $1,2,\cdots,n$ 列的每一元素上得到一个新 n 阶行列式 $\overline{D}$，那么

$$\overline{D}=D+\sum_{j=1}^{n}x_j\sum_{i=1}^{n}A_{ij},\tag{2.5}$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 在 D 中的代数余子式.

换元法就是利用(2.4)，(2.5)两式进行计算行列式的方法.

例9中的行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & x & \cdots & x & x\\ x & a_2 & \cdots & x & x\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x & x & \cdots & a_{n-1} & x\\ x & x & \cdots & x & a_n\end{vmatrix}$$

可视为 $\mathrm{diag}(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 中每一个元素都加上 x 得到，由换元法公式(2.4)，很快算得

$$D=a_1a_2\cdots a_n+x(a_2\cdots a_n+a_1a_3\cdots a_n+\cdots+a_1a_2\cdots a_{n-1}).$$

试用换元法计算例8.

11. n 阶循环（轮换）行列式的计算法

形如

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ za_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ za_{n-1} & za_n & a_1 & \cdots & a_{n-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ za_2 & za_3 & za_4 & \cdots & a_1\end{vmatrix}.\tag{2.6}$$

的行列式叫做 n 阶 z－轮换（循环）行列式，简记为

$$D = | a_1, a_2, \cdots, a_n |_z,$$

其中$a_1, a_2, \cdots, a_n, z$都是复数. 特别地,当$z = 1$时,称D_n为**n阶循环行列式**;当$z = -1$时,称D_n为**n阶反循环行列式**. 当$z = 0$时,显然$D_n = | a_1, a_2, \cdots, a_n |_0 = a_1^n$.

定理 当$z \neq 0$时,n阶z-循环行列式

$$D_n = | a_1, a_2, \cdots, a_n |_z = \prod_{i=1}^{n} f(x_i),$$

其中$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}$,$x_1, x_2, \cdots, x_n$是$x^n - z$的$n$个不同的根.

证明 用$x^n - z$的n个不同的根$x_1, x_2, \cdots, x_n$作n阶范德蒙德行列式

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j) \neq 0,$$

由于$f(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \cdots + a_n x^{n-1}$,且$x_1, x_2, \cdots, x_n$是$x^n - z$的$n$个根,则有

$$D_n \cdot V_n = \begin{vmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n) \\ x_1 f(x_1) & x_2 f(x_2) & \cdots & x_n f(x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} f(x_1) & x_2^{n-1} f(x_2) & \cdots & x_n^{n-1} f(x_n) \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot V_n.$$

因为$V_n \neq 0$,所以$D_n = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$.

例 24 计算n阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$.

解 不难看出$D_n = |1, 2, \cdots, n|_1$. 设$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$,且令$x^n - 1 = 0$的$n$个根是$x_1, x_2, \cdots, x_n$,不妨令$x_1 = 1$,则

$$D_n = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = f(1)\prod_{i=2}^{n} f(x_i).$$

因为　$f(x) - xf(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} - nx^n$,

即　$f(x) = \dfrac{1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} - nx^n}{1 - x}, x \neq 1$,

且对 $x_2,\cdots,x_n$,有 $1 + x_i + x_i^2 + \cdots + x_i^{n-1} = 0$,所以

$$D_n = f(1)\prod_{i=2}^{n} \frac{1 + x_i + x_i^2 + \cdots + x_i^{n-1} - nx_i^n}{1 - x_i}$$

$$= f(1)\prod_{i=2}^{n} \frac{-nx_i^n}{1 - x_i} = f(1)\prod_{i=2}^{n} \frac{-n}{1 - x_i}.$$

又因为 $\prod\limits_{i=2}^{n}(x - x_i) = \dfrac{x^n - 1}{x - 1} = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$,所以

$$\prod_{i=2}^{n}(1 - x_i) = n.$$

于是

$$D_n = f(1)\frac{(-n)^{n-1}}{n} = (-1)^{n-1}\cdot\frac{(n+1)n^{n-1}}{2}.$$

试用行(列)和法求此行列式的值,比较一下这个行列式和例10中的行列式的关系.

例25　计算 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ c & a & b & \cdots & b & b \\ c & c & a & \cdots & b & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c & c & c & \cdots & a & b \\ c & c & c & \cdots & c & a \end{vmatrix}$,其中 $abc \neq 0, b \neq c$.

解　易知 $D_n = |a,b,\cdots,b|_{\frac{c}{b}}$. 设 $f(x) = a + b(x + x^2 + \cdots + x^{n-1})$,

且令 $x^n - \dfrac{c}{b} = 0$ 的 n 个根为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,则

$$D_n = \prod_{i=1}^{n} f(x_i).$$

由 $$f(x)=a+b\cdot\frac{x^n-x}{x-1}=a+b\left(\frac{x^n-\frac{c}{b}}{x-1}+\frac{\frac{c}{b}-x}{x-1}\right)$$

有 $$f(x_i)=a+b\frac{\frac{c}{b}-x_i}{x_i-1}=\frac{(a-b)x_i+(c-a)}{x_i-1}.$$

由根与系数的关系,有

$$\sum x_i=\sum x_ix_j=\cdots=\sum x_{i_1}\cdots x_{i_{n-1}}=0,x_1x_2\cdots x_n=(-1)^{n+1}\frac{c}{b}.$$

利用上述关系式可得

$$D_n=\prod_{i=1}^n\frac{(a-b)x_i+(c-a)}{x_i-1}=\frac{\prod\limits_{i=1}^n[(a-b)x_i+(c-a)]}{\prod\limits_{i=1}^n(x_i-1)}.$$

$$=\frac{(-1)^{n+1}\frac{c}{b}(a-b)^n+(c-a)^n}{(-1)^{n+1}\frac{c}{b}+(-1)^n}=\frac{c(a-b)^n-b(a-c)^n}{c-b}.$$

如果 $b=c$ 时,此问题就变得简单了.通过以上两个例题可以看出,利用循环行列式的定理计算时,需要较强的技巧性.

试用递推法求此行列式的值.

提示:先将最后一列改写为 $b+0,\cdots,b+0,b+(a-b)$,然后拆成两个行列式的和,把第一个行列式最后一列提出公因子 b 后再将其 $(-c)$ 倍加到前面各列,得递推公式 $D_n=(a-b)D_{n-1}+b(a-c)^{n-1}$;将 D_n 转置同理得 $D_n=(a-c)D_{n-1}+c(a-b)^{n-1}$;由这两个递推式即可解得 D_n.

计算行列式的方法很多,在具体计算时,往往要把几种方法结合起来使用;对某个给定的行列式的求值,要注意方法的灵活性,要善于在一题多解中选择一种最简捷的方法.

2.4 练习题及答案

2.4.1 练习题

1. 计算下列各阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$；

(3) $D_n = \begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}$；(4) $D_n = \begin{vmatrix} a & a & \cdots & a & b \\ a & a & \cdots & b & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & b & \cdots & a & a \\ b & a & \cdots & a & a \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 1+a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$；

(6) $\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & -a_n & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & 1 \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x \end{vmatrix}$；(8) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$；

(9) $\begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ x & 0 & z & y \\ y & z & 0 & x \\ z & y & x & 0 \end{vmatrix}$;(10) $D_n = \begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}$;

(11) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & x_3+1 & \cdots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & x_3^2+x_3 & \cdots & x_n^2+x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & x_3^{n-1}+x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}$;

(12) $\begin{vmatrix} a_1^{n-1} & a_1^{n-2}b_1 & \cdots & b_1^{n-1} \\ a_2^{n-1} & a_2^{n-2}b_2 & \cdots & b_2^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^{n-1} & a_n^{n-2}b_n & \cdots & b_n^{n-1} \end{vmatrix}$, $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$;(13) $\begin{vmatrix} a_n & & & & & b_n \\ & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & a_1 & b_1 & & \\ & & d_1 & c_1 & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & \\ d_n & & & & & c_n \end{vmatrix}$;

(14) $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & \cdots & x_2x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & 1+x_n^2 \end{vmatrix}$; (15) $D_n = \begin{vmatrix} 2a & a^2 & & & \\ 1 & 2a & a^2 & & \\ & 1 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a^2 \\ & & & 1 & 2a \end{vmatrix}$;

(16) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$; (17) $\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$;

(18) $D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & x & a \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix}$;

(19)计算 $f(x+1)-f(x)$,其中

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & x^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & x^n \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & x^{n+1} \end{vmatrix}.$$

2. 求证: n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \cos x & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos x & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2\cos x \end{vmatrix}=\cos nx.$$

3. 解方程:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}=0$; (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix}=0$

4. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个互异的数,试解下列线性方程组

$$\begin{cases} a_1^{n-1}x_1+\cdots+a_1x_{n-1}+x_n=-a_1^n \\ a_2^{n-1}x_1+\cdots+a_2x_{n-1}+x_n=-a_2^n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_n^{n-1}x_1+\cdots+a_nx_{n-1}+x_n=-a_n^n \end{cases}.$$

5. 若 $f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$ 有 $n+1$ 个互异的根,则 $f(x)$ 是零多项式.

2.4.2　练习题答案

1. 计算下列各阶行列式:

(1) $n!$(作恒等变形 $c_i-ic_1, i=2,3,\cdots,n$,再按第 1 行展开.)

(2) $(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n})n!$.（箭形行列式）

(3) $x^n+(-1)^{n+1}y^n$.（两条线行列式）

(4) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}[(n-1)a+b]\cdot(b-a)^{n-1}$.（行(列)和相等行列式，也可用换元法或升阶法）

(5) $1+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$.（列和相等行列式，也可用换元法、升阶法或分拆法）

(6) $(-1)^n(n+1)a_1a_2a_3\cdots a_n$.（各行都加到第1(或$n$)行上，再按第1(或$n$)行展开.）

(7) $x^{n-1}+2x^{n-2}+\cdots+(n-1)x+n$.（作恒等变形 $c_n+xc_1+xc_2+\cdots+xc_n$，再按最后一列展开.）

(8) $-3(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$.（提取因子法）

(9) $(x+y+z)(x-y-z)(x-y+z)(x+y-z)$.（提取因子法）

(10) $1-a_1+a_1a_2-a_1a_2a_3+\cdots+(-1)^na_1a_2\cdots a_n$.（各行都加到第1(或$n$)行上，再按第1(或$n$)行展开得递推公式.）

(11) $\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$.（利用 Vandermonde 行列式，也可用分拆法）

(12) $(a_1a_2\cdots a_n)^{n-1}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(\frac{b_i}{a_i}-\frac{b_j}{a_j})$.（利用 Vandermonde 行列式）

(13) $\prod_{i=1}^{n}(a_ic_i-b_id_i)$.（可采用递推法计算）

(14) $1+x_1^2+\cdots+x_n^2$.（可采用升阶法计算）

(15) $(n+1)a^2$.（可采用递推法计算）

(16) $\frac{(-1)^{n-1}}{2}(n+1)!$.（将各列都加到第一列）

(17) $a_1a_2\cdots a_n(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$.（用升阶法化为箭形行列式或用第一数学归纳法，拆第n列；也可利用分拆法或换元法.）

(18) $D_n=\frac{1}{2}[(x+a)^n+(x-a)^n]$.（利用递推法，拆第$n$行(列)；或用反循环行列式的方法.）

(19) $(n+1)!x^n$.（作变形 $c_{n+1}-c_1-xc_2-\cdots-x^{n-1}c_n$ 即得）

2. 用第二数学归纳法证明.

3. 解方程：

(1)解是 1,2, -2.（此行列式是 Vandermonde 行列式）

(2)解是 $0,1,\cdots,n-2$.（提取因子法）

4. 解：假设 $b_1,\cdots,b_n$ 为方程组的解. 考虑 y 的多项式

$$f(y)=y^n+b_1y^{n-1}+\cdots+b_{n-1}y+b_n,$$

则 $f(a_i)=0, i=1,\cdots,n$，即 $a_1,\cdots,a_n$ 是 $f(y)$ 的全部根. 于是由根与系数的关系就有

$$b_1=-(a_1+a_2+\cdots+a_n)=-\sigma_1,$$

$$b_2=a_1a_2+\cdots+a_{n-1}a_n=(-1)^2\sigma_2=\sigma_2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$b_n=(-1)^n(a_1a_2\cdots a_n)=(-1)^n\sigma_n,$$

其中 $\sigma_i=a_1\cdots a_i+a_1a_3\cdots a_{i+1}+\cdots+a_{n-i+1}\cdots a_n$.

另解：线性方程组的系数行列式

$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_j-a_i),$$

$$D_i=(-1)^i\sigma_i\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_j-a_i)=(-1)^i\sigma_iD,$$

由 Cramer 法则得 $\quad x_i=\dfrac{D_i}{D}=(-1)^i\sigma_i, i=1,2,\cdots,n$.

5. 证明：由于 $f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$ 有 $n+1$ 个互异的根，从而得一个关于 $c_0,c_1,\cdots,c_n$ 的齐次线性方程组，其系数行列式是 $n+1$ 阶 Vandermonde 行列式且不为零，于是利用 Cramer 法则得 $c_0=c_1=\cdots=c_n=0$，因此 $f(x)$ 是零多项式.

第 3 章　线性方程组

线性方程组的理论在线性代数中的地位是突出的，它不仅是线性代数的重要内容之一，而且也是线性代数的理论基础. 同时，在数学的各分支及其它许多领域中，线性方程组都被广泛应用着.

关于线性方程组提出的基本问题在本章都得到了圆满的解决，所得到的结果是十分完美的. 本章除了应用行列式这一工具外，还引进了向量和矩阵两种工具. 本章引入的概念和方法都是基本的，从概念到结论、从内容到方法都要掌握并能熟练运用.

3.1　内容提要

3.1.1　高斯消元法

1. 线性方程组及其基本问题

(1)形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{3.1}$$

的方程组称为数域 F 上的一个 **n 元线性方程组**，其中 $a_{ij} \in F$ 称为系数；$b_i \in F$ 称为常数项；x_j 称为未知量，$i = 1,\cdots,m, j = 1,\cdots,n$.

当常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 不全为零时，方程组(3.1) 称为**非齐次线性方程组**；当常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 全为零时，

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

方程组(3.2)称为**齐次线性方程组**.

(2)设数域 F 上有有序组$(k_1, k_2, \cdots, k_n)$，用它们依次代替(3.1)

中的未知量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 后,(3.1) 的每一个方程都变成恒等式,则称 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 为**方程组(3.1)的一个解**.

设 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 是齐次线性方程组(3.2) 的一个解,如果 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 全为零,则称为齐次线性方程组(3.2) 的**零解**;如果 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 不全为零,则称为齐次线性方程组(3.2)的一个**非零解**.

(3)**线性方程组的初等变换**是指:

①交换两个方程的位置;

②用一个不等于零的数乘某一个方程;

③用一个数乘某一个方程后加到另一个方程上.

初等变换把一个线性方程组变为一个与它同解的线性方程组.

(4)关于线性方程组,主要讨论以下四个问题:判定一个方程组是否有解;在有解的情况下确定解的个数并且探求其解法;在有无数多个解时探讨解的构造.

以下我们将在数域 F 上讨论线性方程组.

2.矩阵

(1)由数域 F 上的 st 个数 c_{ij} 排成的一个 s 行 t 列的表

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1t}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2t}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\c_{s1}&c_{s2}&\cdots&c_{st}\end{pmatrix}$$

叫做数域 F 上的一个 **s 行 t 列**(或 $s\times t$) **矩阵**,记为 $(c_{ij})_{s\times t}$ 或 (c_{ij}). c_{ij} 叫做这个矩阵的**元素**,i 是元素 c_{ij} 的行指标,j 是它的列指标.

行数和列数都是 s 的矩阵叫做 **s 阶方阵**;元素都是零的矩阵叫做**零矩阵**;只有一行(列)的矩阵叫做**行(列)矩阵**(或**行(列)向量**).

由线性方程组(3.1)的系数以及常数项所构成的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}$$

分别叫做线性方程组(3.1)的**系数矩阵**和**增广矩阵**.

给定数域 F 上的一个线性方程组当且仅当给定数域 F 上的一个矩阵.

(2) **矩阵的行(列)初等变换**指的是对一个矩阵施行的下列变换:

①交换矩阵的两行(列);

②用一个不等于零的数乘矩阵的某一行(列);

③用一个数乘矩阵的某一行(列)后加到另一行(列)上.

(3) 如果在一个矩阵中可画一条阶梯线,每个台阶只有一行,阶梯线后面的第一个元素都是非零元素,且阶梯线下面的元素都是零,那么这个矩阵叫做**行阶梯形矩阵**;如果在一个行阶梯形矩阵中,非零行的第一个非零元素都是 1,且这些个非零元素 1 所在列的其它元素都是零,那么这个行阶梯形矩阵叫做行**最简形矩阵**.

例如,$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 4\\ 0 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$是行阶梯形矩阵,

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$是行最简形矩阵.

(4) 任意一个 m 行 n 列矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

总可以通过行初等变换和第一种列初等变换化为行最简形矩阵

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n}\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

其中 $r\geqslant 0, r\leqslant m, r\leqslant n$. (其实 $r=R(\boldsymbol{A})$)

3. 高斯消元法

(1)高斯消元法是求解线性方程组的具体方法，它通过对线性方程组施行三种初等变换，将原方程组中某方程的某个未知量的系数变为零，即消去这个元；反复这样做，得到一个化简的线性方程组，这是个阶梯形方程组. 这样的阶梯形线性方程组容易判断是否有解；有解时，容易得到所有解，这就是用消元法求解的过程.

高斯消元法的具体步骤：

第一步，化阶梯形方程组：若方程组(3.1)中 x_1 的系数全为零，则考虑 x_2 的系数；若 x_1 的系数不全为零，则可经过方程组的初等变换将(3.1)中其余的方程消去 x_1. 反复这样做，得到一个阶梯形方程组. 当这个阶梯形方程组无矛盾关系式时，原方程组有解，有解时进行第二步.

第二步，回代过程：由最后一个方程，求得一个未知量，再依次向前回代，逐一地求出全部未知量.

(2)高斯消元法体现在线性方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 上，就是用初等行变换和第一种列初等变换将 $\overline{A}$ 化为行阶梯形矩阵

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & * & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & \cdots & * & * & \cdots & * & * \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_m \end{array}\right),$$

当 $r < m$，且 $d_{r+1},\cdots,d_m$ 不全为零时，原方程组无解；当 $r = m$，或 $r < m$ 且 $d_{r+1} = \cdots = d_m = 0$ 时，原方程组有解. 在有解的情形，再将增广矩阵 $\overline{A}$ 化为最简形矩阵

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_m \end{array}\right).$$

它的一般解为

$$\begin{cases} x_{i_1} = d_1 - c_{1,r+1}k_1 - \cdots - c_{1n}k_{n-r} \\ \cdots\cdots \\ x_{i_r} = d_r - c_{r,r+1}k_1 - \cdots - c_{rn}k_{n-r}, \\ x_{i_{r+1}} = k_1 \\ \cdots\cdots \\ x_{i_n} = k_{n-r} \end{cases}$$

其中 $x_{i_{r+1}},\cdots,x_{i_n}$ 是自由未知量，$i_1,\cdots,i_n$ 是 $1,\cdots,n$ 的一个排列.

注 1 将求解线性方程组的消元法转化为对方程组的增广矩阵施行初等行变换化为阶梯形矩阵，因为不用带着未知量进行计算，所以这一过程不但简单明了，而且由于强调了元素和方程的相对位置，还可以避免计算混乱甚至循环推导这类错误.

注 2 在解线性方程组时，为了理论叙述的方便，才允许交换增广矩阵的列，这对于方程本身没有任何影响；而对于增广矩阵列的其它两种变换，在解线性方程组时是绝对不能使用的.

3.1.2 向量组的线性相关性

1. 向量空间

设 V 是非空集合，把 V 中的元素叫做**向量**，用小写黑体希腊字母 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\cdots$ 来表示；F 是数域，把 F 中的元素叫做**数量**(或**标量**、**纯量**)，用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 来表示. 如果下列条件被满足，则称 V 作成数域 F 上的**向量空间**(**线性空间**).

(1)在 V 定义一个加法运算，即 $\forall \boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta} \in V$，有 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} \in V$；

(2)在 F 与 V 中定义一个数量与向量的乘法运算(简称数乘)，即 $\forall k \in F, \forall \boldsymbol{\alpha} \in V$，都有 $k\boldsymbol{a} \in V$；

(3)加法和数乘运算满足八条算律：

①加法的交换律 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

②加法的结合律 $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

③在 V 中存在零向量，记为 $\mathbf{0}$，且 $\forall \boldsymbol{\alpha} \in V$，都有 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0} = \boldsymbol{\alpha}$；

④ V 中任意向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都存在负向量，记为 $-\boldsymbol{\alpha}$，且 $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$；

⑤ $k(l\boldsymbol{\alpha}) = (kl)\boldsymbol{\alpha}$；

⑥ $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$;

⑦ $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$;

⑧ $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

其中 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}$ 是 V 中任意向量,k,l 是 F 中任意数量.

2. 线性组合、等价向量组

(1)线性组合

设 V 是数域 F 上的向量空间,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\alpha}\in V$,如果存在数域 F 中的一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n,$$

则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的**线性组合**,或称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ **线性表示**.

显然,向量组中的每一个向量都可由该向量组线性表示;零向量可由任意向量组线性表示.

(2)等价向量组

设 Ⅰ:$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 与 Ⅱ:$\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 是数域 F 上向量空间 V 的两个向量组,如果 Ⅰ 中的每一个向量都可以由 Ⅱ 线性表示,则称**向量组 Ⅰ 可由向量组 Ⅱ 线性表示**;如果这两个向量组能相互线性表示,则称它们是**等价的向量组**.

(3)等价向量组的性质

①具有反身性:即每一个向量组都与自身等价;

②具有对称性:若 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 与 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 等价,则 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 与 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 等价;

③具有传递性:若 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 与 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 等价,且 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 与 $\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s\}$ 等价,则 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\}$ 与 $\{\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_s\}$ 等价.

3. 向量组的线性相关性

(1)线性相关、线性无关的概念

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是数域 F 上向量空间 V 的一个向量组,若存在数域 F 中一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$,使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=0,$$

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ **线性相关**. 如果只有当 $k_1=k_2=\cdots=k_n=0$ 时上式才成立,则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ **线性无关**.

(2)线性相关与线性表示的关系

①若一个向量组的部分向量组线性相关,则这个向量组必线性相关(等价说法是:若一个向量组线性无关,则它的任意部分向量组都线性无关);

②一个向量线性相关的充要条件是它为零向量;若一个向量组中含有零向量,这组向量必线性相关;

③向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n(n\geqslant 2)$ 线性相关的充要条件是其中至少有一个向量可由其余 $n-1$ 个向量线性表示;

④向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$(其中 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\mathbf{0}$) 线性相关的充要条件是至少有一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(1<i\leqslant n)$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i-1}$ 线性表示;

⑤若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关,且向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 惟一线性表示;

⑥线性无关的向量组延长分量后仍线性无关(其等价说法是:线性相关的向量组减少分量后仍线性相关);

⑦**替换定理**:如果向量组Ⅰ: $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 线性无关,且向量组Ⅰ可由向量组Ⅱ: $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 线性表示,则 $r\leqslant s$,并且必要时可以对Ⅱ中的向量重新编号,使得用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 替换 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 后,所得向量组Ⅲ: $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 与向量组Ⅱ: $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 等价;

⑧如果向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 可由向量组 $\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s\}$ 线性表示,且 $r>s$,则 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\}$ 必线性相关;

⑨两个线性无关的等价向量组必含有相同个数的向量.

4. 极大无关组、向量组的秩

(1)概念

在向量组Ⅰ: $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 中,如果一个部分向量组Ⅱ: $\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\boldsymbol{\alpha}_{i_2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}\}$ 线性无关,并且向量组Ⅰ中的每一个向量都能由这一部分组Ⅱ线性表示,则称向量组Ⅱ为向量组Ⅰ的一个**极大无关组**.

一个向量组的极大无关组不一定是惟一的. 完全由零向量组成的向量组没有极大无关组;若一个向量组中含有非零向量,则该向量组一

定有极大无关组.

向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的极大无关组所含向量的个数 r 叫做这个**向量组的秩**,记为 $R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$. 规定只含零向量的向量组的秩为零. 秩是向量组自身的属性,是惟一确定的.

(2)有关结论

①一个向量组的任意一个线性无关的部分组都可以扩充成一个极大无关组.

②若向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 的秩是 r,则$\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 中任意 r 个线性无关的向量均可构成它的一个极大无关组.

③向量组 $\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$ 线性无关的充要条件是它的极大无关组是自身.

④向量组与它的任意一个极大无关组等价;

⑤向量组的任意两个极大无关组等价;

⑥向量组的任意两个极大无关组所含向量的个数相同;

⑦如果向量组Ⅰ可由向量组Ⅱ线性表示,则向量组Ⅰ的秩不超过向量组Ⅱ的秩.

⑧等价的向量组有相同的秩.

5. 向量空间的基和维数

设 V 是数域 F 上的向量空间,若 V 中的一组向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 满足:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关;

(2) V 中每个向量都可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示.

则称向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为**向量空间 V 的一个基**;基所含向量的个数叫做 V 的**维数**,记为 $\dim V$. 如果向量空间 V 中含有无数多个线性无关的向量,则 V 是无限维的.

数域 F 上 n 元行(列)向量空间 F^n 的一个基是 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_n$,其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ 的第 i 个分量为1,其余分量为0,故 $\dim F^n=n$.

3.1.3　矩阵的秩

1. 矩阵的行(列)秩

矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的每一行(列)叫做**行(列)向量**,所有行(列)向量叫做

矩阵的行(列)向量组. 矩阵的行(列)向量组的秩叫做矩阵的行(列)秩.

一个矩阵的行秩和列秩相等.

2. 矩阵的秩的两个等价定义

(1)矩阵的行(或列)秩叫做矩阵的秩.

(2)矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的非零子式的最大阶数叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩,记为 $R(\boldsymbol{A})$,易知 $R(\boldsymbol{A}) \leqslant \min\{m,n\}$. 规定零矩阵的秩是0.

显然,行阶梯形矩阵的秩就是非零行的行数.

初等变换不改变矩阵的秩.

3. 行(列)满秩矩阵

秩等于行(列)数的矩阵叫做行(列)满秩矩阵;秩等于阶数的矩阵叫做满秩矩阵. 行满秩阵与列满秩阵均有类似于满秩矩阵的四条性质:

(1)当矩阵乘积中左(右)侧有一个列(行)满秩阵时,则乘积的秩等于另一个因子矩阵的秩.

(2)对 $m\times n$ 行(列) 满秩阵 $\boldsymbol{A}$,必存在 $n\times m$ 列(行) 满秩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I}_m(\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}_n)$.

(3)设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 列满秩阵,则 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.

(4)任意一个列(行)满秩阵可以从矩阵等式两端的左(右)侧消去.

4. 矩阵秩的求法

非零子式法、行(列)秩法、初等变换法.

3.1.4　线性方程组有解的判别

1. 线性方程组有解的条件

(1)线性方程组(3.1)有解的充要条件是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 的秩. 在有解的情况下,当 $R(\boldsymbol{A}) = n$ 时,有惟一解;当 $R(\boldsymbol{A}) < n$ 时,有无穷多个解.

注1　当 $R(\boldsymbol{A}) = m$ 时,线性方程组(3.1) 一定有解,这是因为 $R(\overline{\boldsymbol{A}}) = m$.

注2　当 $R(\boldsymbol{A}) = n$ 时,线性方程组(3.1)不一定有解,但如果有

解,解必惟一.

(2)线性方程组(3.1)有解的充要条件是常数项列向量$\boldsymbol{\beta}$可由系数矩阵A的列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示.

(3)线性方程组(3.1)有解的充要条件是系数矩阵A的列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$与增广矩阵$\overline{A}$的列向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\beta}$等价.

(4)设线性方程组(3.1)有解,它的系数矩阵A和增广矩阵$\overline{A}$的共同秩是$r\neq 0$. 那么可以在(3.1)的m个方程中选出r个方程,使得剩下的$m-r$个方程中的每一个都是这r个方程的结果,因而方程组(3.1)可以归结为解这r个方程所组成的线性方程组.

2. 齐次线性方程组有非零解的条件

(1)齐次线性方程组总有解.

(2)齐次线性方程组(3.2)有非零解的充要条件是它的系数矩阵的秩小于未知量的个数,即$R(A)<n$.

(3)方程个数小于未知量个数的齐次线性方程组必有非零解.

(4)方程个数与未知量个数相等的齐次线性方程组有非零解的充要条件是它的系数行列式为零.

3.1.5　齐次线性方程组解的结构

1. 齐次线性方程组解的性质

(1)齐次线性方程组的两个解之和仍是它的解;

(2)齐次线性方程组的一个解的倍数仍是它的解;

(3)齐次线性方程组的解的线性组合仍是它的解.

因此,齐次线性方程组的解向量构成一个向量空间,称之为**齐次线性方程组的解空间**.

2. 齐次线性方程组的基础解系

如果齐次线性方程组的一组解线性无关,且该齐次组的任意一个解都能用这组解线性表示,则把这组解叫做**齐次线性方程组的一个基础解系**.

3. 基础解系的求法

(1)设齐次线性方程组(3.2)的系数矩阵A的秩为r,其最简形矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

则将 $n-r$ 个自由未知量依次取值 $\{1,0,\cdots,0\},\cdots,\{0,\cdots,0,1\}$ 即可求出它的基础解系.

(2)将一般解的分量都用 $n-r$ 个自由未知量 $x_{i_{r+1}},\cdots,x_{i_n}$ 线性表示,即

$$\begin{cases} x_{i_1} = -c_{1,r+1}x_{i_{r+1}} - \cdots - c_{1n}x_{i_n} \\ \qquad\cdots\cdots \\ x_{i_r} = -c_{r,r+1}x_{i_{r+1}} - \cdots - c_{rn}x_{i_n} \\ x_{i_{r+1}} = x_{i_{r+1}} \\ \qquad\cdots\cdots \\ x_{i_n} = x_{i_n} \end{cases}$$

再将一般解改写成 $n-r$ 个向量的线性组合

$$\begin{pmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_r} \\ x_{i_{r+1}} \\ \vdots \\ x_{i_n} \end{pmatrix} = x_{i_{r+1}}\begin{pmatrix} -c_{1,r+1} \\ \vdots \\ -c_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_{i_{r+2}}\begin{pmatrix} -c_{1,r+2} \\ \vdots \\ -c_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_{i_n}\begin{pmatrix} -c_{1n} \\ \vdots \\ -c_{rn} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其组合系数恰好是这 $n-r$ 个自由未知量,这 $n-r$ 个解向量就是所求的一个基础解系.

4. 齐次线性方程组的解空间的基和维数

在 n 元齐次线性方程组有非零解的情况下,它必有基础解系,且基

础解系所含解的个数是自由未知量的个数 $n-R(A)$. 即:当 $R(A)<n$ 时,齐次线性方程组解空间的基就是它的一个基础解系;当 $R(A)=n$ 时,齐次线性方程组解空间就是零空间,没有基;但无论哪种情形,解空间的维数都是 $n-R(A)$.

5. 齐次线性方程组解的结构

设 n 元齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 $r(r<n)$, $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是它的一个基础解系,则该齐次线性方程组的通解(一般解)是

$$\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r},k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in F.$$

3.1.6 非齐次线性方程组解的结构

1. 导出齐次线性方程组

将非齐次线性方程组(3.1)的常数项换成0,就得到一个齐次线性方程组(3.2),称方程组(3.2)为**非齐次线性方程组(3.1)的导出组**.

2. 非齐次线性方程组解的性质

(1)非齐次线性方程组的两个解的差是它的导出组的解;

(2)非齐次线性方程组的一个解与它的导出组的一个解之和仍是非齐次线性方程组的一个解.

注 非齐次线性方程组的两个解之和与一个解的倍数不再是该非齐次方程组的解,但它的两个解和的 $\frac{1}{2}$ 倍仍是它的解.

3. 非齐次线性方程组解的结构

如果 $\boldsymbol{\eta}_0$ 是非齐次线性方程组的一个特解, $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是其导出组的一个基础解系,则非齐次线性方程组的通解(一般解)是

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{\eta}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r},k_1,k_2,\cdots,k_{n-r}\in F.$$

3.1.7 结式与判别式

1. 两个一元多项式的结式与公根

(1)设

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m(m>0),$$
$$g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n(n>0)$$

是复数域 C 上两个多项式,用它们的系数构造的 $m+n$ 阶行列式

$$R(f,g)=\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_m & & & \\ & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_m & & \\ & & \ddots & \ddots & & \ddots & & \\ & & & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & & & \\ & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n & & \\ & & \ddots & \ddots & & & \ddots & \\ & & & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_n \end{vmatrix}\begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n\text{ 行} \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} m\text{ 行} \end{matrix}$$

叫做多项式$f(x)$与$g(x)$的**结式**.

(2)对于多项式$f(x)$,$g(x)$,则$R(f,g)=0$的充要条件是$f(x)$与$g(x)$有非常数公因式或$a_0=b_0=0$.

(3)对于多项式$f(x)$,$g(x)$,$R(f,g)=0$的充要条件是$f(x)$与$g(x)$在复数域中有公共根或$a_0=b_0=0$.

2. 二元高次方程组的解法

设$f(x,y)$与$g(x,y)$是两个复系数二元多项式. 按x的降幂写出这两个多项式

$$f(x,y)=a_0(y)x^m+a_1(y)x^{m-1}+\cdots+a_m(y)\,(m>0),$$
$$g(x,y)=b_0(y)x^n+b_1(y)x^{n-1}+\cdots+b_n(y)\,(n>0),$$

其中$a_i(y)$,$b_j(y)$$(i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,n)$都是$y$的多项式,然后求出$f$和$g$的结式,记为$R_x(f,g)$. $R_x(f,g)$是y的一个多项式$\varphi(y)$.

如果(x_0,y_0)是方程组$\begin{cases}f(x,y)=0\\g(x,y)=0\end{cases}$的解,则$y_0$是$R_x(f,g)$的一个根;反之,如果$y_0$是$R_x(f,g)$的一个根,则$a_0(y_0)=b_0(y_0)=0$,或者存在复数$x_0$使$(x_0,y_0)$是方程组$\begin{cases}f(x,y)=0\\g(x,y)=0\end{cases}$的一个解.

这样,求两个未知量的两个方程

$$f(x,y)=0,g(x,y)=0$$

的公共解可归结为求一个未知量的一个方程$R_x(f,g)=0$的根.

3. 多项式的判别式

设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$是复数域C上一个$n(n>1)$次多项式. 令$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\in C$是$f(x)$的全部根(重根按重数计算). 乘积

$$D=a_0^{2n-2}\prod_{i>j}(\alpha_i-\alpha_j)^2$$

叫做多项式$f(x)$的**判别式**. 并且

$$R(f,f')=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_0D.$$

3.2　重点和难点

本章是围绕线性方程组理论的四个中心问题展开讨论的.

首先介绍了古老但仍被广泛使用的求解线性方程组的高斯消元法,主要通过线性方程组的初等变换求同解的线性方程组,即对方程组的增广矩阵用初等行变换和第一种列初等变换化为阶梯形矩阵求解. 其次是对线性方程组解的情况的讨论,引入了向量的线性相关性、极大无关组、向量组的秩、矩阵的秩等概念,给出了线性方程组有解的充要条件. 最后利用向量空间的概念研究了线性方程组解的结构.

本章最后利用线性方程组理论给出二元高次方程组的求解方法.

本章的重点是:向量组的线性相关性,矩阵的秩与矩阵的等价标准形,线性方程组的理论,二元高次方程组的解法.

向量组的线性相关性,不仅是向量的基本研究课题,而且是定义矩阵的秩、研究线性方程组有解的条件、定义齐次线性方程组基础解系等的基础,它贯穿于全章,因此成为本章的一个重点.

矩阵的秩是矩阵自身的最基本的属性,讨论一个矩阵首先讨论其秩,然后在秩的基础上再讨论其它问题. 本章首先借助于矩阵秩的概念彻底解决了线性方程组的问题;其次以秩为依据建立了等价标准形的概念,为讨论矩阵作了示范;最后,还以两个矩阵乘积的秩为主,讨论了秩的其它一些问题,得到了许多关于秩的关系式. 因此,矩阵的秩与矩阵的等价标准形是本章的一个重点.

线性方程组的理论是本章的核心,它包括四个部分:有解的判定、解的个数、解法、解的结构. 解线性方程组、求齐次线性方程组的基础解

系以后经常用到. 高斯消元法所体现的形变解不变思想、标准形的思想;用增广矩阵代替线性方程组,求解方程组在矩阵上进行,这种分离系数的思想都很重要. 因此成为本章的一个重点.

二元高次方程组的解法是应用齐次线性方程组有非零解的条件而推导出的行列式解法,不仅二元高次方程组的解法本身是一个重要的研究课题,而且对中学数学的有关内容具有指导意义,因此成为本章的一个重点.

本章的难点是:向量组的线性相关性,含有参数的线性方程组的求解,有关矩阵秩的证明.

向量组的线性相关性是线性代数中的一个重点,也是一个难点,对逻辑推理有较高要求,相对比较抽象. 在学习本部分内容时,无论是判断、证明还是计算,关键在于要深刻理解基本概念,搞清其相互之间的关联,要学会用定义来推导论证,注意推导过程中逻辑的正确性.

含有参数的线性方程组求解要熟练掌握,因为它综合考查矩阵的秩的确定、线性方程组解的情况判定、求解方法及解的结构.

有关矩阵的秩的等式或不等式的证明,常常和向量组的秩、线性方程组的解等相联系,推证有一定的难度. 熟记关于矩阵的秩的一些结论,对有关问题的论证会有很大的帮助.

3.3 例题解析

3.3.1 关于向量组的线性相关性的判别法

对于抽象给出的向量组,判断或证明其线性相关与线性无关常采用以下方法:定义法,根据向量组的秩或行列式是否等于零,利用有关结论,反证法.

1. 定义法

欲证向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关(或无关),只需由

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$$

推出 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 不全为零(或全为零)即可.

例 1 设 $k(\geqslant 3)$ 个向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关,则

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k+\boldsymbol{\alpha}_1$$

线性无关的充要条件是 k 为奇数.

证明　设 $a_1(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+a_2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+\cdots+a_k(\boldsymbol{\alpha}_k+\boldsymbol{\alpha}_1)=\mathbf{0}$,　(1)

则

$$(a_1+a_k)\boldsymbol{\alpha}_1+(a_1+a_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(a_{k-1}+a_k)\boldsymbol{\alpha}_k=\mathbf{0},$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关,则有

$$\begin{cases}a_1+a_k=0\\a_1+a_2=0\\\cdots\cdots\\a_{k-1}+a_k=0\end{cases}\tag{2}$$

而齐次线性方程组(2)的系数行列式

$$D_k=\begin{vmatrix}1&0&\cdots&1\\1&1&\cdots&0\\&\ddots&\ddots&\\0&&1&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{1+k}.$$

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组(2)只有零解 $\Leftrightarrow$ 齐次线性方程组(2)的系数行列式 $D_k=1+(-1)^{1+k}\neq0\Leftrightarrow k$ 为奇数.

注　利用练习题1, $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k+\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关

$$\Leftrightarrow D_k=\begin{vmatrix}1&1&0&\cdots&0\\0&1&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}=1+(-1)^{1+k}\neq0\Leftrightarrow k\text{ 为奇数}.$$

2. 利用向量组秩的方法

向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关(或无关)的充要条件是 $R\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}<n$(或 $=n$).

例2　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关,则下列线性无关的向量组是(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$；

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3+4\boldsymbol{\alpha}_4,3\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_4,3\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+8\boldsymbol{\alpha}_3+16\boldsymbol{\alpha}_4$；

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$；

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$.

解　应填(C).

由例1可知(A)中向量必线性相关；

因为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&2&4\\0&3&1&2\\3&3&8&16\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&4\\0&3&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,即向量组(B)的秩为2,故向量组(B)线性相关；

因为$|\boldsymbol{B}|=\begin{vmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\-1&0&0&1\end{vmatrix}=2\neq 0$,故向量组(C)必线性无关；

因为$(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)-(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4)+(\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1)=\boldsymbol{0}$,所以向量组(D)线性相关.

3. 利用有关结论

利用一些熟知的定理来证明或判定向量组的线性相关性是一种重要的方法.常用的定理有:部分组线性相关,则整体线性相关(其等价说法是:一组向量线性无关,则它的任意部分组都线性无关);如果一组向量中有一个向量能用其余向量线性表示,则这组向量线性相关;线性无关的向量组延长分量后仍线性无关(其等价说法是:线性相关的向量组减少分量后仍线性相关)等.

例3　设$a_1,a_2,\cdots,a_k$为互异的数,$k\leqslant n$,证明向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_i=(1,a_i,a_i^2,\cdots,a_i^{n-1}),i=1,2,\cdots,k$$

线性无关.

证明　由所给出的具体向量$\boldsymbol{\alpha}_i$可作为一个n阶Vandermonde行列式的第i列的元素,于是可再取$n-k$个数$a_{k+1},\cdots,a_n$,使$a_1,\cdots,a_k,a_{k+1},\cdots,a_n$互异,这样便得到一个$n$阶Vandermonde行列式

$$|\boldsymbol{V}_n| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k & a_{k+1} & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_k^2 & a_{k+1}^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_k^{n-1} & a_{k+1}^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

从而 Vandermonde 矩阵 $\boldsymbol{V}_n$ 的 n 个列向量是线性无关的. 因此 $\boldsymbol{V}_n$ 的前 k 个列向量也是线性无关的,即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性无关.

4. 反证法

例4　设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示,证明:表示法惟一的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

证明　必要性. 设 $\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r$ 且表法惟一.

(反证法)假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关,则存在不全为零的数 a_1, $a_2,\cdots,a_r$,使

$$a_1\boldsymbol{\alpha}_1 + a_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_r\boldsymbol{\alpha}_r = \boldsymbol{0},$$

两式相加,得

$$\boldsymbol{\beta} = (k_1 + a_1)\boldsymbol{\alpha}_r + (k_2 + a_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (k_r + a_r)\boldsymbol{\alpha}_r.$$

由 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 不全为零知,$\boldsymbol{\beta}$ 有两种不同的表示法,这与题设矛盾,故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

充分性. 设 $\boldsymbol{\beta}$ 有两种表示法

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_r\boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta} = a_1\boldsymbol{\alpha}_1 + a_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_r\boldsymbol{\alpha}_r.$$

两式相减,得

$$(k_1 - a_1)\boldsymbol{\alpha}_r + (k_2 - a_2)\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (k_r - a_r)\boldsymbol{\alpha}_r = \boldsymbol{0}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,得 $k_i - a_i = 0$,即 $k_i = a_i, i = 1,2,\cdots,r$,故 $\boldsymbol{\beta}$ 表示法惟一.

5. 关于具体向量组的线性相关性的判别法

对于 F^n 中具体给出的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$,判断其线性相关性通常采用以下方法:

(1)先由定义写出 $a_1\boldsymbol{\alpha}_1 + a_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + a_k\boldsymbol{\alpha}_k = \boldsymbol{0}$,再根据向量相等写出齐次线性方程组;若该齐次线性方程组有非零解,则向量组线性相

关;若该齐次线性方程组只有零解,则向量组线性无关.

(2)排成矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k)$(列向量时)或 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_k\end{pmatrix}$(行向量时),求 $R(A)$. 若 $R(A)<k$ 时,向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性相关;若 $R(A)=k$ 时,向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性无关.

(3)对于 n 个 n 维向量,可同上将其排成矩阵 A,用 $|A|=0$ 是否成立来判定 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是否线性相关.

(4)利用线性相关性的有关结论,如"部分相关,则整体相关"等来判定.

例 5　对任意实数 a,b,c,线性无关的向量组是(　　).

(A) $(2,-1,a),(3,b,-2),(0,0,0)$;

(B) $(1,-1,a,1),(3,-2,b,1),(0,0,c,-2)$;

(C) $(a,-3,-4),(1,4,b),(c,1,-5),(-7,8,3)$;

(D) $(1,1,1,a),(-1,-1,-1,b),(0,0,0,c)$.

解　应填(B).

(A)中含有零向量,必线性相关;

由向量组 $(1,-1,1),(3,-2,1),(0,0,-2)$ 线性无关,则增填第 3 个分量后所得的向量组(B)也线性无关;

(C)为 4 个 3 维向量,必线性相关;

(D)中向量组所构成的矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&a\\-1&-1&-1&b\\0&0&0&c\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&a\\0&0&0&a+b\\0&0&0&c\end{pmatrix}$,

当 $c\neq0$ 时,$R(A)=2$;当 $c=0$ 时,$R(A)\leqslant2$,从而向量组线性相关.

3.3.2　关于矩阵秩的证明方法

1. **定义法**

其一,利用行列式定义法,确定出其不为零子式的最大阶数;其二,讨论其行秩(或列秩).

例 6　设 $m\times n$ 矩阵 A 的某个 r 阶子式 $D\neq0$,而包含 D 的所有 r

+1 阶子式全等于零. 证明 $R(\boldsymbol{A})=r$.

证明　不失一般性,设 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行前 r 列元素构成的 r 阶子式 $D\neq 0$(即 $\boldsymbol{A}$ 的 r 阶顺序主子式),于是 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关,若能证 $\boldsymbol{A}$ 的后 $m-r$ 个行向量均能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示,则 $R(\boldsymbol{A})=r$. 为此,作 $(r+1)\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}_i=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\alpha}_r\\ \boldsymbol{\alpha}_i\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & \cdots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \cdots & a_{rn}\\ a_{i1} & \cdots & a_{ir} & a_{i,r+1} & \cdots & a_{in}\end{pmatrix}$$

其中 $i=r+1,\cdots,m$. 只需证 $R(\boldsymbol{A}_i)=r$,即 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 的线性组合. 事实上,将 $\boldsymbol{A}_i$ 按列分块得 $\boldsymbol{A}_i=(\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r,\boldsymbol{\beta}_{r+1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)$,其中 $\boldsymbol{\beta}_j$ 为 $r+1$ 维列向量,$j=1,2,\cdots,n$. 由于 r 阶子式 $D\neq 0$,故 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关. 由题设含 D 的 $r+1$ 阶子式全等于零,故对任意一个 i 有 $|\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r,\boldsymbol{\beta}_i|=0$,于是 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r,\boldsymbol{\beta}_i$ 线性相关,但 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关,因而 $\boldsymbol{\beta}_i$ 是 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 的线性组合,即 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ 的列向量组的极大无关组,所以 $R(\boldsymbol{A}_i)=r$. 因此,$R(\boldsymbol{A})=r$.

注　此题给出了求一个矩阵秩的简捷方法. 它的理论意义在于揭示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 r 仅与某个非零 r 阶子式 D 以及含 D 的 $r+1$ 阶子式全为零有关,而无须要求 $\boldsymbol{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式全为零这个强条件.

例7　设 $\boldsymbol{A}\in M_{mn}(F),\boldsymbol{B}\in M_{pq}(F),\boldsymbol{C}\in M_{mq}(F)$,则

$$R\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}\geqslant R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B}).$$

并且当 $\boldsymbol{A}$(或 $\boldsymbol{B}$)为可逆矩阵时,或 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$ 时,上式等号成立.

证明　设 $R(\boldsymbol{A})=r,R(\boldsymbol{B})=s$,则 $\boldsymbol{A}$ 中必有一个 r 阶子式 $|\boldsymbol{A}_r|\neq 0$,$\boldsymbol{B}$ 中必有一个 s 阶子式 $|\boldsymbol{B}_s|\neq 0$,于是矩阵 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 中必有一个 $r+s$ 阶子式 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}_r & *\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_s\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}_r|\cdot|\boldsymbol{B}_s|\neq 0$,故

$$R\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geqslant r + s = R(A) + R(B).$$

特别地，当 $C = 0$ 时，由 $R\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \leqslant R\begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} + R\begin{pmatrix} 0 \\ B \end{pmatrix} = R(A) + R(B)$，故得

$$R\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = R(A) + R(B).$$

当 A 为可逆矩阵时，由于$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}C \\ 0 & I_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$，即

$$R\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = R(A) + R(B).$$

同理，当 B 为可逆矩阵时，亦有上述等式.

2. 初等变换法

众所周知，初等变换不改变矩阵的秩. 利用初等变换将矩阵化为阶梯形，由阶梯形矩阵确定矩阵的秩. 此法比较适合具体的矩阵求秩.

3. 利用矩阵秩的基本关系式证明较复杂的矩阵秩的问题

(1)若 $k \neq 0$，则 $R(kA) = R(A)$；

(2)矩阵乘积的秩不超过每个因子矩阵的秩，即 $R(AB) \leqslant \min\{R(A), R(B)\}$. 特别地，当一个因子矩阵可逆时，矩阵乘积的秩等于另一个因子矩阵的秩.

证明　(1)式显然成立，我们只证明(2)式.

先证：$R(AB) \leqslant \min\{R(A), R(B)\}$.

将矩阵 A 按行分块，$A = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)'$，则 $AB = (\alpha_1 B, \alpha_2 B, \cdots, \alpha_m B)'$. 若 A 的行向量的极大无关组为 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$，则 A 的任意一个行向量 α_k 均可由 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_r}$ 线性表示. 从而任意一个 $\alpha_k B$ 均可由 $\alpha_{i_1} B, \alpha_{i_2} B, \cdots, \alpha_{i_r} B$ 线性表示，故向量组 $\alpha_1 B, \alpha_2 B, \cdots, \alpha_m B$ 的秩不超过 r，即 $R(AB) \leqslant R(A)$. 同理，对矩阵 B 用按列分块的方法可以证明 $R(AB) \leqslant R(B)$. 于是 $R(AB) \leqslant \min\{R(A), R(B)\}$.

再证：当 A 可逆时，$R(AB) = R(B)$.

由于$B = A^{-1}(AB)$，由上面结论可知$R(B) \leqslant R(AB)$，但$R(AB) \leqslant R(B)$，从而$R(AB) = R(B)$．

4. 化标准形法

设A是秩为r的$m \times n$矩阵，则存在m阶可逆矩阵P，n阶可逆矩阵Q，使

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

称$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$为矩阵$A$的等价标准形.

例8　对$m \times n$行满秩阵A，必存在$m \times n$列满秩阵B，使$AB = I_m$.

证明　由于A是$m \times n$行满秩阵，故存在m阶可逆矩阵P和n阶可逆矩阵Q，使$PAQ = (I_m, 0)$，因此

$$PAQ\begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix} = (I_m, 0)\begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix} = I_m,$$

即$AQ\begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix} = P^{-1}$，于是$AQ\begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}P = I_m$，令$B = Q\begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}P$，则$AB = I_m$且$B$是$n \times m$列满秩阵.

例9　（满秩分解定理）

设A是秩为r的$m \times n$矩阵，则$A = P_1Q_1$，其中P_1是$m \times r$的列满秩阵，Q_1是$r \times n$的行满秩阵.

证明　因为A是秩为r的$m \times n$矩阵，则存在m阶可逆矩阵P，n阶可逆矩阵Q，使$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 令$P^{-1} = (P_1, P_2)$，$Q^{-1} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$，其中$P_1$为$m \times r$阵，$Q_1$为$r \times n$阵，则$A = P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1} = P_1Q_1$，显然$P_1$是$m \times r$的列满秩阵，$Q_1$是$r \times n$的行满秩阵.

例10　设$A \in M_{mn}(F)$，$B \in M_{np}(F)$，则

$$R(A) + R(B) - n \leqslant R(AB) \leqslant \min\{R(A), R(B)\}.$$

特别地：

(1)当 $AB=0$ 时,$R(A)+R(B)\leqslant n$;

(2)当 $R(A)=n$ 时,$R(AB)=R(B)$;

(3)当 $R(B)=n$ 时,$R(AB)=R(A)$.

证明 只需证 $R(A)+R(B)-n\leqslant R(AB)$.

设 $R(A)=r,R(B)=s$,对矩阵 A,存在 m 阶可逆矩阵 P,n 阶可逆矩阵 Q,使 $PAQ=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$,令 $Q^{-1}B=\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix}$,其中 B_1 是 $r\times p$ 阵,B_2 是 $(n-r)\times p$ 阵,于是

$$PAB=PAQQ^{-1}B=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1\\ B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1\\ 0\end{pmatrix}$$

因此 $$R(AB)=R\begin{pmatrix}B_1\\ 0\end{pmatrix}=R(B_1',0)=R(B_1')=R(B_1).$$

而 $R(Q^{-1}B)=R(B)=s$,则

$$R(B)=R(B_1',B_2')\leqslant R(B_1')+R(B_2')\leqslant R(AB)+(n-r),$$

故 $R(A)+R(B)-n\leqslant R(AB)$.

特别地:

(1)当 $AB=0$ 时,$R(AB)=0$,由上述有 $R(A)+R(B)-n\leqslant 0$,即 $R(A)+R(B)\leqslant n$.

(2)当 $R(A)=n$ 时,由 $R(A)+R(B)-n\leqslant R(AB)$,得 $R(B)\leqslant R(AB)$,但 $R(AB)\leqslant R(B)$,故 $R(AB)=R(B)$. 同理可证,当 $R(B)=n$ 时,$R(AB)=R(A)$.

例 11 设 A,B,C 为依次可乘的三个矩阵,则

$$R(ABC)\geqslant R(AB)+R(BC)-R(B).$$

证明 设 B 为 $n\times p$ 阵,$R(B)=r$,则由满秩分解定理,存在 $n\times r$ 列满秩矩阵 P_1,$r\times p$ 行满秩矩阵 Q_1,使 $B=P_1Q_1$. 故 $R(ABC)=R(AP_1Q_1C)=R[(AP_1)(Q_1C)]$. 根据例 10 的结论,有

$$R[(AP_1)(Q_1C)]\geqslant R(AP_1)+R(Q_1C)-r.$$

又因 P_1 为列满秩阵,Q_1 为行满秩阵,所以

$$R(AP_1)=R(AP_1Q_1),R(Q_1C)=R(P_1Q_1C).$$

因此得　　$R(ABC) \geqslant R(AB) + R(BC) - R(B)$.

注　上述不等式是例 10 不等式的推广.

5. 利用线性方程组的理论讨论矩阵的秩

矩阵的秩是讨论线性方程组解的重要工具. 反过来,我们也可以用线性方程组解的理论来讨论矩阵的秩. 下面的几个例子具有一定的典型性.

例 12　设 $A \in M_{mn}(F)$,$B \in M_{np}(F)$,若 $AB = 0$,则 $R(A) + R(B) \leqslant n$.(例 10 的特例 1)

证明　将矩阵 B 按列分块,$B = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p)$,由 $AB = 0$ 得 $A\beta_1 = A\beta_2 = \cdots = A\beta_p = 0$,这说明 B 的列向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p$ 都是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解向量,故 B 的列向量 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p$ 的极大无关组所含向量的个数不超过齐次组 $Ax = 0$ 的解空间的维数,即 $R(B) \leqslant n - R(A)$,于是 $R(A) + R(B) \leqslant n$.

试用替换定理证明.

例 13　设 A 是 $m \times n$ 实矩阵,求证:$R(A'A) = R(AA') = R(A)$.

证明　因为 $A'A$ 与 AA' 互为转置矩阵,故 $R(A'A) = R(AA')$. 下面证明 $R(A'A) = R(A)$. 我们将证明齐次线性方程组 $Ax = 0$ 与 $A'Ax = 0$ 同解.

显然 $Ax = 0$ 的解都是 $A'Ax = 0$ 的解,因此 $n - R(A) \leqslant n - R(A'A)$,即 $R(A) \geqslant R(A'A)$.

反之,若实向量 α 是方程组 $A'Ax = 0$ 的解,则 $\alpha'A'A\alpha = 0$,即 $(A\alpha)'(A\alpha) = 0$. 设 $A\alpha = (b_1,b_2,\cdots,b_m)'$,则 $b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_m^2 = 0$. 因为 $b_i(i = 1,2,\cdots,m)$ 是实数,故每个 $b_i = 0$,于是 $A\alpha = 0$,即 α 是 $Ax = 0$ 的解,因此得 $R(A'A) \geqslant R(A)$. 于是 $R(A'A) = R(A)$.

思考:本题结论在复数域上是否成立? 为什么?

6. 利用分块矩阵的方法

分块矩阵在分块初等变换下秩不变.

分块矩阵秩的基本公式:

(1) $R(A,B) \leqslant R(A) + R(B)$,$R\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \leqslant R(A) + R(B)$;

(2) $R\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geqslant R(A) + R(B)$;

并且当 A(或 B)为可逆矩阵时,或 $C=0$ 时,上式等号成立.

例 14 证明: $R(A) - R(B) \leqslant R(A \pm B) \leqslant R(A) + R(B)$.

证明 因为 $A + B = (A,B)\begin{pmatrix} I \\ I \end{pmatrix}$,所以

$$R(A+B) \leqslant R(A,B) \leqslant R(A) + R(B);$$

又 $R(A-B) \leqslant R(A) + R(-B) = R(A) + R(B)$,于是

$$R(A \pm B) \leqslant R(A) + R(B).$$

由于 $R(A-B) + R(B) \geqslant R(A-B+B) = R(A)$,故

$$R(A) - R(B) \leqslant R(A-B);$$

又因为 $R(A+B) + R(-B) \geqslant R(A+B-B) = R(A)$,故

$$R(A) - R(B) \leqslant R(A+B).$$

试用行(列)秩法证明 $R(A+B) \leqslant R(A) + R(B)$.

例 15 设 $A \in M_{mn}(F)$,$B \in M_{np}(F)$,利用分块矩阵的方法证明

$$R(A) + R(B) - n \leqslant R(AB).$$

证明 考虑下列矩阵的分块初等变换:

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & AB \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ A & AB \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I_n & -B \\ A & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} B & I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

用子式法可知矩阵 $\begin{pmatrix} B & I_n \\ 0 & A \end{pmatrix}$ 的秩不小于矩阵 $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ 的秩. 因此,

$R(AB) + n \geqslant R(A) + R(B)$,即 $R(A) + R(B) - n \leqslant R(AB)$.

例 16 利用分块矩阵的方法证明例 11:

$$R(ABC) \geqslant R(AB) + R(BC) - R(B).$$

证明 用分块初等变换得

$$\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} ABC & AB \\ 0 & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & AB \\ -BC & B \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix},$$

于是 $$R(ABC) + R(B) = R\begin{pmatrix} ABC & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix}.$$

但是
$$R\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{pmatrix} \geqslant R\begin{pmatrix} AB & 0 \\ 0 & BC \end{pmatrix} = R(AB) + R(BC),$$
从而得
$$R(ABC) + R(B) \geqslant R(AB) + R(BC),$$
即
$$R(ABC) \geqslant R(AB) + R(BC) - R(B).$$

通过以上几个例子可以看出,利用分块矩阵法证明秩的关系式比较简捷,但技巧性较强,关键在于构造适当的分块矩阵以及经过适当的分块矩阵的初等变换.

例 17　设 A 为 n 阶可逆矩阵,则 D 为 m 阶矩阵,B,C 分别为 $n \times m, m \times n$ 矩阵,则
$$R\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = R(A) + R(D - CA^{-1}B).$$
此命题称为**秩的第一降阶定理**.

证明　由 A 可逆,则有
$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & -A^{-1}B \\ 0 & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$
故
$$R\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} = R(A) + R(D - CA^{-1}B).$$

由秩的第一降阶定理,又可得秩的升阶公式
$$R(D - CA^{-1}B) = R\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} - R(A).$$
再由秩的升阶公式,来证明例 10 是很简单的.

事实上,
$$R(AB) = R[0 - (-A)I_n^{-1}B] = R\begin{pmatrix} I_n & B \\ -A & 0 \end{pmatrix} - R(I_n) = R\begin{pmatrix} I_n & B \\ -A & 0 \end{pmatrix} - n$$
$$\geqslant R(B) + R(-A) - n = R(A) + R(B) - n.$$

注　当 D 为 m 阶可逆矩阵时,则秩的第一降阶定理有另一种形式
$$R\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = R(D) + R(A - BD^{-1}C).$$

特别地,当 A,D 皆可逆时,则

$$R(A)-R(D)=R(A-BD^{-1}C)-R(D-CA^{-1}B).$$

此结论称为秩的第二降阶定理.

3.3.3 线性方程组的有关问题

1. 与线性方程组有关的计算问题

例 18 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,t,-1),\boldsymbol{\alpha}_3=(t,1,2),\boldsymbol{\beta}=(4,t^2,-4)$,若 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示且表示法不惟一,求 t 及 $\boldsymbol{\beta}$ 的表达式.

解 设 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}$,即

$$\begin{cases}x_1+x_2+tx_3=4\\-x_1+tx_2+x_3=t^2.\\x_1-x_2+2x_3=-4\end{cases}$$

由于增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&t&4\\-1&t&1&t^2\\1&-1&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-r_3}\begin{pmatrix}0&2&t-2&8\\0&t-1&3&t^2-4\\1&-1&2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{r_2\leftrightarrow r_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&-4\\0&2&t-2&8\\0&t-1&3&t^2-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-\frac{t-1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2&-4\\0&2&t-2&8\\0&0&-\frac{1}{2}(t+1)(t-4)&t(t-4)\end{pmatrix}.$$

当 $t=-1$ 时,$R(A)=2,R(\overline{A})=3$,方程组无解;当 $t=4$ 时,$R(A)=R(\overline{A})=2<3$,方程组有无穷多解. 此时

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix}1&-1&2&-4\\0&2&2&8\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+r_2]{\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

同解方程组为 $\begin{cases}x_1=-3x_3\\x_2=4-x_3\end{cases}$,通解为 $\begin{cases}x_1=-3k\\x_2=4-k.\\x_3=k\end{cases}$

故 $t=4$,且 $\boldsymbol{\beta}=-3k\boldsymbol{\alpha}_1+(4-k)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3$,$k$ 任意.

例 19 求下列向量组的一个极大无关组,并把不属于极大无关组

的向量用极大无关组线性表示.

$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,2,0),\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,6)$.

解　以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 为列构成的矩阵为 $\boldsymbol{A}$,将 $\boldsymbol{A}$ 用初等行变换化为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&6\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&3&0&1\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix},$$

从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是一个极大无关组,且 $\boldsymbol{\alpha}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_5=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4$.

例20　λ 取何值时,线性方程组

$$\begin{cases}(2\lambda+1)x_1-\lambda x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda-1\\(\lambda-2)x_1+(\lambda-1)x_2+(\lambda-2)x_3=\lambda\\(2\lambda-1)x_1+(\lambda-1)x_2+(2\lambda-1)x_3=\lambda\end{cases}$$

有惟一解、无解、无穷多解？在有无穷多解时,求通解.

解　方法1

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}2\lambda+1&-\lambda&\lambda+1\\\lambda-2&\lambda-1&\lambda-2\\2\lambda-1&\lambda-1&2\lambda-1\end{vmatrix}\overset{c_1-c_3}{=\!=}\begin{vmatrix}\lambda&-\lambda&\lambda+1\\0&\lambda-1&\lambda-2\\0&\lambda-1&2\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)(\lambda+1).$$

(1)当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq\pm1$ 时,有惟一解.

(2)当 $\lambda=0$ 时,增广矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\-2&-1&-2&0\\-1&-1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&-1&0&-2\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$R(\boldsymbol{A})=2,R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$, 无解.

(3)当 $\lambda=1$ 时,增广矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{pmatrix}3&-1&2&0\\-1&0&-1&1\\1&0&1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&-1&-1&-3\\0&0&0&2\end{pmatrix},$$

$R(\boldsymbol{A})=2,R(\overline{\boldsymbol{A}})=3$,无解.

(4)当 $\lambda=-1$ 时,增广矩阵

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0&-2\\-3&-2&-3&-1\\-3&-2&-3&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{5}&1\\0&1&\frac{3}{5}&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$R(A)=R(\overline{A})=2<3$,有无穷多解,通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}\\-\frac{3}{5}\\1\end{pmatrix}$.($k$ 任意)

方法2 $\overline{A}=\begin{pmatrix}2\lambda+1&-\lambda&\lambda+1&\lambda-1\\\lambda-2&\lambda-1&\lambda-2&\lambda\\2\lambda-1&\lambda-1&2\lambda-1&\lambda\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}2&1-2\lambda&2-\lambda&1\\0&-5&-4\lambda^2-\lambda&8\lambda^2+2\lambda-1\\0&0&\lambda(\lambda-1)(\lambda+1)&-(\lambda+1)(2\lambda^2-2\lambda+1)\end{pmatrix}$$

(1)当 $\lambda\neq0$ 且 $\lambda\neq\pm1$ 时,$R(A)=R(\overline{A})=3$,有惟一解.

(2)当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$ 时,$R(A)=2,R(\overline{A})=3$,无解.

(3)当 $\lambda=-1$ 时,$R(A)=R(\overline{A})=2<3$,有无穷多解,且

$$\overline{A}\to\begin{pmatrix}2&3&3&-1\\0&-5&-3&5\\0&0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&\frac{3}{5}&1\\0&1&\frac{3}{5}&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

于是其余同前.

注 求解含参数的线性方程组常采用两种方法:

方法1 对方程组的增广矩阵 $\overline{A}$ 利用初等行变换化为阶梯形矩阵,然后根据 $R(A),R(\overline{A})$ 是否相等,讨论参数在什么情况下有解?无解?有解时再求出一般解.

方法2 当方程的个数与未知量的个数相等时,可利用 Cramer 法则,即计算系数行列式 $|A|$,对于使得 $|A|\neq0$ 的参数值,方程组有惟

一解，且可利用 Cramer 法则求出惟一解（当方程的阶数不高时）；而对于使得 $|\boldsymbol{A}|=0$ 的参数值，分别列出增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 用消元法求解.

如果方程的个数与未知量的个数相同，最好采用方法2求解，因为求含参数的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，比只用初等行变换化含参数的增广矩阵 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 为阶梯形矩阵要容易. 另外，如果直接对 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 利用初等行变换进行化简，可能会产生讨论不全的错误.

例21　已知4阶方阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$. 如果 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$，求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

解　**方法1**　令 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)'$，则由 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 得

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 代入上式整理得

$$(2x_1+x_2-3)\boldsymbol{\alpha}_2+(-x_1+x_3)\boldsymbol{\alpha}_3+(x_4-1)\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}.$$

由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关，得

$$\begin{cases}2x_1+x_2-3=0\\ -x_1+x_3=0\\ x_4-1=0\end{cases}.$$

解此方程组得通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}.\ (k\text{ 任意})$$

方法2　由 $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关和 $\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4$ 知 $R(\boldsymbol{A})=3$，故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的基础解系只含一个解向量. 又由 $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+0\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{0}$ 知 $(1,-2,1,0)'$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的非零解，从而也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系. 再由

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$$

知，$(1,1,1,1)'$是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解. 故 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}.\ (k\text{ 任意})$$

例 22 设四元齐次线性方程组(1)：$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2-x_4=0\end{cases}$，又已知某齐次线性方程组(2) 的基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\\1\end{pmatrix}$. 求(1)与(2)的公共解.

解　方法 1　方程组(2)的通解为 $\boldsymbol{\xi}=k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-k_2\\k_1+2k_2\\k_1+2k_2\\k_2\end{pmatrix}$，

即 $\begin{cases}x_1=-k_2\\x_2=k_1+2k_2\\x_3=k_1+2k_2\\x_4=k_2\end{cases}$，代入(1) 得 $\begin{cases}k_1+k_2=0\\k_1+k_2=0\end{cases}$，通解为 $\begin{cases}k_1=-t\\k_2=t\end{cases}$($t$ 任意)，故公共解为

$$\boldsymbol{\xi}=-t\boldsymbol{\eta}_1+t\boldsymbol{\eta}_2=t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.\ (t\text{ 任意})$$

方法 2　先求(1)的基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\1\end{pmatrix}$. 因此(1)

与(2)的公共解设为

$$x_1\boldsymbol{\xi}_1+x_2\boldsymbol{\xi}_2=y_1\boldsymbol{\eta}_1+y_2\boldsymbol{\eta}_2 \text{ 或 } x_1\boldsymbol{\xi}_1+x_2\boldsymbol{\xi}_2-y_1\boldsymbol{\eta}_1-y_2\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{0}.$$

即 $\begin{cases}-x_2+y_2=0\\x_2-y_1-2y_2=0\\x_1-y_1-2y_2=0\\x_2-y_2=0\end{cases}$，它的系数矩阵 $\begin{pmatrix}0&-1&0&1\\0&1&-1&-2\\1&0&-1&-2\\0&1&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$.

通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\y_1\\y_2\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$（$k$ 任意），公共解为：$-k\boldsymbol{\eta}_1+k\boldsymbol{\eta}_2=k(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)=k\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

2. 与线性方程组有关的证明问题

此类题目根据齐次线性方程组的基础解系的定义及有关的定理进行证明.

例 23　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=0$，且行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 中某个元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}\neq 0$. 证明齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的所有解都可写为如下形式：

$$k(A_{i1},\cdots,A_{ij},\cdots,A_{in})'.$$

证明　因为 $|\boldsymbol{A}|=0$ 且 $A_{ij}\neq 0$，故 $R(\boldsymbol{A})=n-1$，因而齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有一个向量. 由于 $|\boldsymbol{A}|=0$，于是 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{0}$，这说明 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的任意一列向量都是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解. 而已知 $A_{ij}\neq 0$，从而列向量 $(A_{i1},\cdots,A_{ij},\cdots,A_{in})'$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，其全部解是 $k(A_{i1},\cdots,A_{ij},\cdots,A_{in})'$.

给出具体的齐次线性方程组，我们会求基础解系. 反之，即已知一齐次线性方程组的基础解系，如何来求该齐次组呢？下面的例题给出了一种方法.

例 24　设 W 是数域 F 上 n 元列空间 F^n 的任意真子空间，则 W 必是某一 n 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间.

证明　设 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 是子空间 W 的一组基，令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r)$，这是一个 $n\times r$ 矩阵. 考虑齐次线性方程组 $\boldsymbol{B}'\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，因为 $R(\boldsymbol{B}')=$

$R(\boldsymbol{B})=r$，故其基础解系含 $n-r$ 个向量，记为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r}$. 令 $\boldsymbol{A}'=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{n-r})$，这是一个 $n\times(n-r)$ 矩阵，且 $R(\boldsymbol{A})=n-r$，显然齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$，故其解空间是 W.

例25 设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵，且非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 有解. 证明非齐次组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的任意解向量都可由它的 $n-r+1$ 个线性无关的解向量线性表示，且表示系数之和等于 1.

证明 设 $\boldsymbol{\eta}_0$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个特解，$\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 是它的导出齐次组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系. 显然 $\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 都是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的解.

先证 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的 $n-r+1$ 个解向量 $\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性无关. 设

$$k_0\boldsymbol{\eta}_0+k_1(\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_2)+\cdots+k_{n-r}(\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_{n-r})=0,$$

则 $(k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-r})\boldsymbol{\eta}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}=\boldsymbol{0}$ (1)

必有 $k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-r}=0$（否则，$\boldsymbol{\eta}_0$ 可由 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性表示，这说明 $\boldsymbol{\eta}_0$ 是导出齐次组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，与它是非齐次组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的解矛盾.），由此(1)式变为

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}=\boldsymbol{0}$$

由于 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性无关，故

$$k_1=k_2=\cdots=k_{n-r}=0.$$

再由 $k_0+k_1+k_2+\cdots+k_{n-r}=0$ 解得 $k_0=0$. 从而证明

$$\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_{n-r}$$

线性无关.

再证 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的任意解向量 $\boldsymbol{\xi}$ 都可由 $\boldsymbol{\eta}_0,\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性表示.

因为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}&=\boldsymbol{\eta}_0+k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}\\&=\boldsymbol{\eta}_0+k_1(\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_2)+\cdots+k_{n-r}(\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_{n-r})-(k_1+k_2+\cdots+k_{n-r})\boldsymbol{\eta}_0\\&=(1-k_1-k_2-\cdots-k_{n-r})\boldsymbol{\eta}_0+k_1(\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_1)+k_2(\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_2)+\cdots+k_{n-r}(\boldsymbol{\eta}_0+\boldsymbol{\eta}_{n-r})\end{aligned}$$

上式表明：$Ax=\beta$ 的任意解向量 ξ 都可由 $\eta_0,\eta_0+\eta_1,\eta_0+\eta_2,\cdots,\eta_0+\eta_{n-r}$ 线性表示，显然表示系数之和等于1.

注1　通常把这 $n-r+1$ 个解向量叫做非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的基础解系. 对于 n 元非齐次线性方程组 $Ax=\beta$，当 $R(A)=R(A,\beta)$ 时，必有基础解系，每个基础解系含有 $n-r+1$ 个解向量；且它有无穷多个基础解系.

注2　但是，非齐次线性方程组 $Ax=\beta$ 的全部解向量不构成向量空间. 它的全部解可以由一个基础解系的一切线性组合使组合系数之和等于1时而得到.

3.4　练习题及答案

3.4.1　练习题

1. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，又

$$\beta_i=a_{i1}\alpha_1+a_{i2}\alpha_2+\cdots+a_{ir}\alpha_r,i=1,2,\cdots,k.$$

则

(1) 向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 的秩等于表示系数矩阵 $A=(a_{ij})_{k\times r}$ 的秩；

(2) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 线性相关的充要条件是系数矩阵 $A=(a_{ij})_{k\times r}$ 的秩小于 k.

2. 证明：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关的充要条件是存在向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表示且表示法惟一.

3. 两个向量组等价的充要条件是它们有相同的秩，且其中一个可由另一个线性表示.

4. 设向量组 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 的秩为 r，从其中任取 s 个向量 $\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_s}$. 证明

$$R\{\alpha_{i_1},\cdots,\alpha_{i_s}\}\geqslant r+s-m.$$

5. 设向量组 $\alpha_1=(3,1,1,1),\alpha_2=(1,-1,-3,5),\alpha_3=(a,3,2,-1),\alpha_4=(a,-2,-6,10)$，$a$ 为何值时，该向量组线性相关；并在此时求出它的秩和一个极大无关组.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,求证:$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\geqslant n$.

7. 求证 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵(即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$)的充要条件是

$$R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n.$$

8. 求证:n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对合矩阵(即 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{I}$)的充要条件是

$$R(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=n.$$

9. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是数域 F 上的 n 阶矩阵,若线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解,且每个方程组的基础解系含 m 个线性无关的向量,求证:$R(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\leqslant n-m$.

10. 设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r,从 $\boldsymbol{A}$ 中任取 s 行,作一个 $s\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$. 证明 $R(\boldsymbol{B})\geqslant r+s-m$.

11. 设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 r 的 n 阶矩阵,求证:$\boldsymbol{A}$ 是幂等矩阵的充要条件是存在 $n\times r$ 列满秩阵 $\boldsymbol{S}$ 和 $r\times n$ 行满秩阵 $\boldsymbol{T}$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{ST},\boldsymbol{TS}=\boldsymbol{I}_r$.

12. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵,证明:$R(\boldsymbol{A}^*)=\begin{cases}n, 当 R(\boldsymbol{A})=n 时;\\ 1, 当 R(\boldsymbol{A})=n-1 时;\\ 0, 当 R(\boldsymbol{A})<n-1 时.\end{cases}$

13. 判定下列向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能否用向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示,若能,写出线性表示式.

(1) $\boldsymbol{\beta}=(5,4,-2,4)$;$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,-1,3),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-2,1,1)$;

(2) $\boldsymbol{\beta}=(1,1,1,1)$;$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,2,-1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(4,0,1,-1),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,2,0,0)$.

14. 设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵,求证:必存在秩为 $n-r$ 的 $n\times(n-r)$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$,使 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$.

15. 已知四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为3,又 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解向量,其中 $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix},\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\3\end{pmatrix}$,试求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解.

16. 讨论线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3+x_4=1\\x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=\lambda\\x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=\lambda^2\\x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=\lambda^3\end{cases}$ 的解.

17. 设在实平面上有三条不同的直线:

$$l_1:ax+by+c=0,$$
$$l_2:bx+cy+a=0,$$
$$l_3:cx+ay+b=0,$$

求证:它们交于一点的充要条件是 $a+b+c=0$.

18. 求一个齐次线性方程组,使它的解空间由下列四个向量所生成.

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(-1,-1,1,2,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,1,12,8),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,0,0,-5,-4),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,-2,-9,-4).$$

19. 已知线性方程组

$$\begin{cases}x_1+a_1x_2+a_1^2x_3=a_1^3\\x_1+a_2x_2+a_2^2x_3=a_2^3\\x_1+a_3x_2+a_3^2x_3=a_3^3\\x_1+a_4x_2+a_4^2x_3=a_4^3\end{cases}$$

(1)如果 a_1,a_2,a_3,a_4 互不相等,证明方程组无解;

(2)如果 $a_1=a_3=k,a_2=a_4=-k(k\neq 0)$,则方程组有解,并求其通解.

20. 设齐次线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2+\cdots+bx_n=0\\bx_1+ax_2+\cdots+bx_n=0\\\qquad\cdots\cdots\\bx_1+bx_2+\cdots+ax_n=0\end{cases}$$

试讨论 a,b 为何值时,方程组只有零解、有无穷多解?在有无穷多解时,求通解.

21. 设四元齐次线性方程组(1)：$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0\\x_1+2x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$，又已知某齐次线性方程组(2)的基础解系为$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}2\\-1\\a+2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\\a+8\end{pmatrix}$. 当$a$为何值时，方程组(1)与(2)有非零公共解？在有非零公共解时，求出全部非零公共解.

22. 设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$为齐次线性方程组的一个基础解系，$\boldsymbol{\beta}_1=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=k_1\boldsymbol{\alpha}_2+k_2\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r=k_1\boldsymbol{\alpha}_r+k_2\boldsymbol{\alpha}_1$，其中$k_1,k_2$为实常数. 试问$k_1,k_2$满足什么关系时，$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$也为该齐次线性方程组的一个基础解系.

23. 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{\beta}$是$m\times 1$矩阵，$\boldsymbol{x}$是$n\times 1$矩阵. 证明线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$有惟一解的充要条件是$\boldsymbol{A}$为列满秩阵，且$\boldsymbol{\beta}$为$\boldsymbol{A}$的列向量的线性组合.

24. 设$\boldsymbol{A}$是$m\times n$矩阵，$\boldsymbol{x}$是$n\times 1$矩阵. 证明线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$对任意$m$维列向量$\boldsymbol{\beta}$都有解的充要条件是$\boldsymbol{A}$为行满秩阵.

25. 若$\boldsymbol{A}$是一个秩为r的行满秩阵，$\boldsymbol{A}$的r个行向量恰是某一齐次线性方程组的基础解系，而$\boldsymbol{B}$为任意的r阶可逆矩阵，试证矩阵$\boldsymbol{BA}$的r个行向量也是该齐次线性方程组的基础解系.

26. λ为何值时，多项式$f(x)=x^3-\lambda x+4$与$g(x)=2x^2+(1-\lambda)x+2$有公共根？

27. λ为何值时，多项式$f(x)=x^4-4x+\lambda$有重根？

28. 解方程组$\begin{cases}y^2-7xy+4x^2+13x-2y-3=0\\y^2-14xy+9x^2+28x-4y-5=0\end{cases}$.

3.4.2　练习题答案

1. (1)设$R(A)=r$，不妨设矩阵$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_r)$的最高阶非零子式位于前$r$行前$r$列，往证$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$是$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_k$的一个极大无关组.

(2)用定义法证明，证明$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$线性相关转化为齐次线性方

程组有非零解的充要条件是系数矩阵的秩小于未知量的个数 k；或直接利用(1)的结果来证明(2).

2. 必要性. 取 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$，显然 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，若 $\boldsymbol{\beta}=a_1\boldsymbol{\alpha}_1+a_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_r\boldsymbol{\alpha}_r$，两式相减，得 $(k_1-a_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-a_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_r-a_r)\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}$，由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关，得 $k_i-a_i=0$，即 $k_i=a_i,i=1,2,\cdots,r$，故 $\boldsymbol{\beta}$ 表示法惟一.

充分性. 设 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\alpha}_r$ 且表法惟一.

(反证法)假设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性相关，则存在不全为零的数 $a_1,a_2,\cdots,a_r$，使 $a_1\boldsymbol{\alpha}_1+a_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+a_r\boldsymbol{\alpha}_r=\mathbf{0}$. 两式相加，得

$$\boldsymbol{\beta}=(k_1+a_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2+a_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_r+a_r)\boldsymbol{\alpha}_r.$$

由 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 不全为零知，$\boldsymbol{\beta}$ 有两种不同的表示法，这与题设矛盾，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

3. 必要性显然. 充分性：设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 线性表示，且它们的秩为 r，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 的极大无关组 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 的极大无关组 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 线性表示，由替换定理知 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_r}$ 与 $\boldsymbol{\beta}_{j_1},\cdots,\boldsymbol{\beta}_{j_r}$ 等价，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$ 等价.

4. 设 $R\{\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}\}=t$，将 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$ 的极大无关组扩充为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 的极大无关组，需添加 $r-t$ 个向量，但 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 中除去 $\boldsymbol{\alpha}_{i_1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{i_s}$ 还有 $m-s$ 个向量. 故 $r-t\leqslant m-s$. 或用一个向量组中去掉一个向量后秩最多少 1 或用替换定理.

5. $a=2$ 时该向量组线性相关；此时向量组的秩为 3，且 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ (或 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$) 为一个极大无关组.

6. 考虑下列矩阵的初等变换

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2 & \mathbf{0}\\ -\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}.$$

或用矩阵秩的基本关系式来证明.

7. 考虑下列矩阵的初等变换

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2 & \boldsymbol{A}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2 & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}\end{pmatrix}.$$

或用矩阵秩的基本关系式来证明必要性.

8. 考虑下列矩阵的初等变换

$$\begin{pmatrix} I+A & 0 \\ 0 & I-A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I+A & I+A \\ 0 & I-A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} I+A & I+A \\ I+A & 2I \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(I-A^2) & I+A \\ 0 & 2I \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(I-A^2) & 0 \\ 0 & 2I \end{pmatrix}.$$

或用矩阵秩的基本关系式来证明必要性.

9. 方程组 $Ax=0$ 的每个解都是方程组 $(A-B)x=0$ 的解,因此 $n-R(A)\leqslant n-R(A-B)$,即 $R(A-B)\leqslant R(A)$,又 $m=n-R(A)$,从而 $R(A-B)\leqslant n-m$.

10. 用初等变换法和分块矩阵法.

11. 化标准形法,$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$,代入 $A^2=A$ 消去两侧的可逆矩阵 P,Q,得 $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}QP\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,只须令 $S=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}$,$T=(I_r,0)\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$ 即可.

或 A 是幂等矩阵的充要条件是存在可逆矩阵 P,使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}(I_r,0),$$

故
$$A=P\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix}(I_r,0)P^{-1},$$

令
$$S=P\begin{pmatrix} I_r \\ 0 \end{pmatrix},T=(I_r,0)P^{-1}$$

即可.

12. 利用 $AA^*=|A|I_n$. 当 $R(A)=n$ 时,A 可逆,A^* 也可逆,故 $R(A^*)=n$;当 $R(A)=n-1$ 时,由 $AA^*=0$ 得 $R(A^*)+R(A)\leqslant n$,于是 $R(A^*)\leqslant 1$,又 $A^*\neq 0$,则 $R(A^*)=1$;当 $R(A)<n-1$ 时,$A^*=0$,因此 $R(A^*)=0$.

13. (1) $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 表示,且 $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$;

(2) $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示.

14. 考虑线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$,它的基础解系含有 $n-r$ 个解向量,不妨设为 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r}$,令 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_{n-r})$ 即为所求.

15. 通解为 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\ -1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. ($k$ 任意)

16. 当 $\lambda=-3$ 时,方程组无解;当 $\lambda=1$ 时,方程组有无穷多解;当 $\lambda\neq1,-3$ 时,方程组有惟一解.

17. 三条不同直线交于一点 $\Leftrightarrow$ 线性方程组 $\begin{cases}ax+by+c=0\\ bx+cy+a=0\\ cx+ay+b=0\end{cases}$ 有惟一解 $\Leftrightarrow R\begin{pmatrix}a&b\\ b&c\\ c&a\end{pmatrix}=R\begin{pmatrix}a&b&-c\\ b&c&-a\\ c&a&-b\end{pmatrix}=2\Leftrightarrow R\begin{pmatrix}a&b\\ b&c\\ c&a\end{pmatrix}=2$ 且 $\begin{vmatrix}a&b&-c\\ b&c&-a\\ c&a&-b\end{vmatrix}=0$

$\Leftrightarrow R\begin{pmatrix}a&b\\ b&c\\ c&a\end{pmatrix}=2$ 且 $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=0\Leftrightarrow a+b+c=0.$

18. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大无关组是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$,设 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1\\ \boldsymbol{\alpha}_2\end{pmatrix}$,齐次线性方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系是 $\boldsymbol{\xi}_1=(0,1,1,0,0)'$,$\boldsymbol{\xi}_2=(-5,7,0,1,0)'$,$\boldsymbol{\xi}_3=(-4,4,0,0,1)$. 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3)'$,则5元的齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 为所求.

19. (1) 因为 $R(A)=3$,$R(\overline{A})=4$,所以方程组无解.

(2) 通解为 $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ k^2\\ 0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-k^2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$. ($t$ 任意)

20. (1)当 $a \neq b$ 且 $a \neq (n-1)b$ 时,方程组只有零解;

(2)当 $a = b$ 时,有无穷多解,通解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_3 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + k_{n-1}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}(k_i \text{ 任意});$$

(3)当 $a = (n-1)b$ 时,有无穷多解,通解为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}(k \text{ 任意})$.

21. 当 $a = -1$ 时,方程组(1)与(2)有非零公共解,且非零公共解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k_1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}.(k_1, k_2 \text{ 任意})$$

22. $k_1^r + (-1)^{r+1}k_2^r \neq 0$.

23. 线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 有惟一解$\Leftrightarrow R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{\beta}) = n \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$ 为列满秩阵,且 $\boldsymbol{\beta}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量的线性组合.

24. 充分性显然,下面证必要性. 因为线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{\beta}$ 对任意 m 维列向量 $\boldsymbol{\beta}$ 都有解,特别地,取 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\varepsilon}_i, i = 1,2,\cdots,m$,因此 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_m$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示,而 m 维列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 显然可由 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_m$ 线性表示,从而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_m$ 等价,即 $R(\boldsymbol{A}) = m$,故 $\boldsymbol{A}$ 为行满秩阵.

25. 设 $\boldsymbol{A}$ 的 r 个行向量是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系,因为 $\boldsymbol{BA}$ 的 r 个行向量是 $\boldsymbol{A}$ 的 r 个行向量的线性组合,所以 $\boldsymbol{BA}$ 的 r 个行向量也是齐次组 $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{0}$ 的解;又因为 $\boldsymbol{B}$ 是 r 阶可逆矩阵,故 $R(\boldsymbol{BA}) = R(\boldsymbol{A}) = r$,于是 $\boldsymbol{BA}$ 的 r 个行向量是线性无关的,因而也是齐次组 $\boldsymbol{Cx} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系.

26. 两个多项式是否有公共根可以通过它们是否有非零次的最大公因式或它们的结式是否为零来判定. 由于 $R(f,g) = 2(\lambda+3)(\lambda-5)(\lambda-6)$,故 $\lambda=-3$ 或 $\lambda=5$ 或 $\lambda=6$ 时,多项式$f(x)$ 与 $g(x)$ 有公共根.

27. 多项式$f(x) = x^4-4x+\lambda$ 有重根$\Leftrightarrow f(x)$ 与$f'(x)$ 有非零次的最大公因式, 或 $R(f,f') = 256(\lambda^3-27) = 0$, 故 $\lambda=3$ 或 $\lambda=\dfrac{-3\pm3\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$ 时, $f(x)$ 有重根.

28. $R_y(f,g) = -24x(x-1)(x-2)(x+2)$,原方程组共有四个解 $(0,-1),(1,2),(2,3)$与$(-2,1)$.

第4章 矩 阵

矩阵这一概念是从线性方程组和其它许多事物中抽象出来的. 矩阵理论是高等代数的主要内容之一,贯穿于线性代数的各个部分,处于中心的地位. 矩阵是数学及许多科学领域的有力工具,它有着广泛的应用. 矩阵的运算是矩阵理论研究的基础,本章主要讨论矩阵的运算及有关的问题,内容比较具体,但公式和方法较多,必须熟练掌握.

4.1 内容提要

4.1.1 矩阵的运算

1. 矩阵的线性运算

(1)相等矩阵

如果 A 与 B 都是 $m\times n$ 矩阵,即有相同的行数和列数,则称为**同型矩阵**;如果 A 与 B 是同型矩阵,并且对应位置上的元素都相等,则 A 与 B 叫做**相等矩阵**,记为 $A=B$.

(2)矩阵加法

设 $A=(a_{ij})_{m\times n}$,$B=(b_{ij})_{m\times n}$ 是数域 F 上的两个矩阵,其和定义为

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}.$$

注 两个矩阵只有是同型矩阵时才能相加.

(3)数乘矩阵

设 $k\in F$,$A=(a_{ij})_{m\times n}$ 是数域 F 上的矩阵,k 与 A 的乘积定义为

$$kA=Ak=(ka_{ij})_{m\times n}.$$

注1 只有当矩阵的每个元素都有公因子时,才可以将其提到矩阵符号外边. 这一点是与行列式不同的.

注2 设 A,B 是两个同型矩阵,其差定义为

$$A-B=A+(-B).$$

矩阵的加法与数乘叫做**矩阵的线性运算**.

(4)矩阵的线性运算满足的运算律(假定以下矩阵都是 $m\times n$ 矩阵)

①交换律 $A+B=B+A$；

②结合律 $(A+B)+C=A+(B+C)$；

③$A+0=0+A=A; A+(-A)=0$；

④分配律 $(k+l)A=kA+lA; k(A+B)=kA+kB$

⑤数乘结合律 $(kl)A=k(lA)$；

⑥$1\cdot A=A$.

2. 矩阵的乘法

(1)设 $A=(a_{ij})_{m\times s}, B=(b_{ij})_{s\times n}$ 是数域 F 上的两个矩阵，定义 A 与 B 的乘积 AB 是一个 $m\times n$ 矩阵，它的 (i,j) 元

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}.$$

注　两个矩阵只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时才能相乘.

(2)方阵的幂

①设 A 是一个 n 阶方阵，m 是正整数，则

$$A^m=\underbrace{AA\cdots A}_{m个}$$

称为 A 的 m 次幂.

②方阵的幂的运算律

$$A^kA^l=A^{k+l},(A^k)^l=A^{kl},(\lambda A)^k=\lambda^kA^k.$$

(3)矩阵的乘法满足的运算律

①结合律 $(AB)C=A(BC)$；

②分配律 $A(B+C)=AB+AC,(A+B)C=AC+BC$；

③数与乘法的结合律 $(kA)B=A(kB)=k(AB)$；

④$0_{p\times m}A_{m\times n}=0_{p\times n}; A_{m\times n}0_{n\times p}=0_{m\times p}$.

注1　矩阵的乘法不满足交换律，即 $AB\neq BA$. 因此一般有：

$$(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2;$$

$$(A+B)(A-B)\neq A^2-B^2;$$

$$(AB)^k\neq A^kB^k;$$

$$(A+B)^k\neq A^k+C_k^1A^{k-1}B+\cdots+C_k^{k-1}AB^{k-1}+B^k.$$

但当 $AB=BA$ 时，上述关系式均变为等式.

注 2　由 $AB=0$ 不能推出 $A=0$ 或 $B=0$；只有当 A,B 有一个可逆时，另一个才是零矩阵. 于是

由 $A^2=A$ 不能推出 $A=0$ 或 $A=E$；

由 $A^2=E$ 不能推出 $A=\pm E$；

由 $A^2=0$ 不能推出 $A=0$；但当 A 为实对称阵时，必有 $A=0$.

注 3　矩阵的乘法不满足消去律，即由 $AB=AC$（或 $BA=CA$）且 $A\neq 0$ 不能推出 $B=C$；但当 A 可逆时，消去律成立.

3. 矩阵多项式

(1) 设 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$ 是数域 F 上的多项式，A 是数域 F 上的 n 阶方阵，则 $f(A)=a_0E+a_1A+a_2A^2+\cdots+a_mA^m$ 称为**矩阵 A 的多项式**.

(2) 矩阵多项式的运算律

若 $f(x),g(x)\in F[x]$，$A,B\in M_n(F)$，则

① $h(x)=f(x)+g(x)\Rightarrow h(A)=f(A)+g(A)$；

② $p(x)=f(x)g(x)\Rightarrow p(A)=f(A)g(A)$；

③ $f(A)g(A)=g(A)f(A)$；

④ $AB=BA\Rightarrow Bf(A)=f(A)B$；

⑤ $AB=BA\Rightarrow f(A)g(B)=g(B)f(A)$.

4. 转置矩阵

(1) 将矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行列互换，所得到的矩阵叫做 **A 的转置矩阵**，记为 A' 或 A^T，即 $A'=(a_{ij})_{n\times m}$.

(2) 转置矩阵的运算律

① $(A')'=A$；

② $(A+B)'=A'+B'$；

③ $(kA)'=kA'$；

④ $(AB)'=B'A'$；

⑤ $R(A')=R(A)$.

5. 方阵的行列式

(1) 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 n 阶方阵，则矩阵 A 的元素按原来的位置所构成的 n 阶行列式 $|a_{ij}|$ 叫做**方阵 A 的行列式**，记为 $|A|$.

(2)方阵的行列式的运算律(设 A 与 B 都是 n 阶方阵)

①$|A'| = |A|$;

②$|kA| = k^n |A|^n$;

③$|AB| = |A||B|$;

④$|A^k| = |A|^k$.

但 $|A+B| \neq |A| + |B|$,这是矩阵加法与行列式性质的区别.

6. 方阵的迹

n 阶矩阵 $A = (a_{ij})$ 的主对角元之和称为 A 的迹,记为 $tr(A)$,即

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

方阵迹的运算律:

(1) $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$;

(2) $tr(kA) = ktr(A)$;

(3) $tr(A') = tr(A)$;

(4) $tr(AB) = tr(BA)$.

4.1.2　几类特殊的矩阵

1. 基本矩阵

设 E_{ij} 是 $m \times n$ 矩阵,且 (i,j) 元为1,其余元均为0,则称

$$E_{ij}(i = 1,2,\cdots,m, j = 1,2,\cdots,n)$$

是一组基本矩阵.

基本矩阵的性质:

(1)对于任意矩阵 $A = (a_{ij})_{m\times n}$,有 $A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$.

(2)在矩阵 A 的左边乘以 E_{ij},就相当于把 A 的第 j 行搬到第 i 行的位置,而乘积矩阵的其余行全为零行;

在矩阵 A 的右边乘以 E_{ij},就相当于把 A 的第 i 列搬到第 j 列的位置,而乘积矩阵的其余列全为零列.

(3) $E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il}, & 当 k = j; \\ 0, & 当 k \neq j. \end{cases}$

2. 单位矩阵

主对角线上元素都是1,其余元素都是0的 n 阶矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

叫做 n **阶单位矩阵**，记为 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{I}_n$，在不致于引起混淆时简记为 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{I}$. 显然有

$$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n} = \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n = \boldsymbol{A}_{m\times n}.$$

3. 数量矩阵

矩阵

$$k\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{pmatrix}$$

称为**数量矩阵或纯量矩阵**.

数量矩阵的运算性质：

(1) $(k\boldsymbol{E}_m)\boldsymbol{A}_{m\times n} = \boldsymbol{A}_{m\times n}(k\boldsymbol{E}_n) = k\boldsymbol{A}_{m\times n}$；

(2) $k\boldsymbol{E} \pm l\boldsymbol{E} = (k \pm l)\boldsymbol{E}$；$(k\boldsymbol{E})(l\boldsymbol{E}) = (kl)\boldsymbol{E}$；

(3) $k\boldsymbol{E}$ 可逆 $\Leftrightarrow k \neq 0$，且当 $k\boldsymbol{E}$ 可逆时，$(k\boldsymbol{E})^{-1} = k^{-1}\boldsymbol{E}$；

(4) 一个 n 阶矩阵是数量矩阵的充要条件是它与任何 n 阶矩阵相乘都可交换.

4. 对角矩阵

主对角线以外的元素都是 0 的 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

叫做**对角矩阵**. 简记为 $\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$.

对角矩阵的运算性质：

(1) $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \pm \mathrm{diag}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$

$= \mathrm{diag}(a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, \cdots, a_n \pm b_n)$；

(2) $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n) \cdot \mathrm{diag}(b_1, b_2, \cdots, b_n) = \mathrm{diag}(a_1 b_1, a_2 b_2, \cdots, a_n b_n)$；

(3) $k \cdot \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \mathrm{diag}(ka_1, ka_2, \cdots, ka_n)$；

(4) $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 可逆 $\Leftrightarrow a_1, a_2, \cdots, a_n \neq 0$，且当 $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 可逆时，有 $\mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{-1} = \mathrm{diag}(a_1^{-1}, a_2^{-1}, \cdots, a_n^{-1})$；

(5) 在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，就相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的各行分别乘以 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的相应的主对角元；

在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，就相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的各列分别乘以 $\boldsymbol{\Lambda}$ 的相应的主对角元.

5. 上(下)三角矩阵

主对角线以下的元素都是0的 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

叫做**上三角矩阵**.

主对角线以上的元素都是0的 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

叫做**下三角矩阵**.

方阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 为上(下)三角矩阵的充要条件是当 $i > j(i < j)$ 时，$a_{ij} = 0$.

零方阵、单位矩阵、数量矩阵、对角矩阵既是上三角矩阵又是下三角矩阵.

上(下)三角矩阵的运算性质：

$$(1)\begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & & & * \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & & & * \\ & a_{22} \pm b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \pm b_{nn} \end{pmatrix};$$

$$(2)\ k\begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & & & * \\ & ka_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & ka_{nn} \end{pmatrix};$$

$$(3)\begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & & & * \\ & b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & & & * \\ & a_{22}b_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix}$$

(4)上(下)三角矩阵可逆⇔它的主对角元全不为零,且上(下)三角矩阵的逆矩阵仍为上(下)三角矩阵:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & * \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & & & * \\ & a_{22}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn}^{-1} \end{pmatrix}.$$

其中,同一矩阵或不同矩阵里的 * 所表示的元素未必相同.

6. 对称矩阵、反对称矩阵

若$A' = A$，则称A为**对称矩阵**；若$A' = -A$，则称A为**反对称矩阵**.

(1)对称矩阵的性质

①若A,B都是对称矩阵，则$A \pm B$也是对称矩阵；

②若A是对称矩阵，则kA与A^*也是对称矩阵；

③若A,B都是对称矩阵，则AB是对称矩阵$\Leftrightarrow AB = BA$；

④若A是对称矩阵，则A^k也是对称矩阵；

⑤若A是可逆的对称矩阵，则A^{-1}也是对称矩阵；

⑥对任意的n阶矩阵A，有$A + A'$与AA'都是对称矩阵；

⑦实对称矩阵的特征根是实数.

(2)反对称矩阵的性质

①若A,B都是反对称矩阵，则$A \pm B$也是反对称矩阵；

②若A是反对称矩阵，则kA也是反对称矩阵；

③若A,B都是反对称矩阵，则AB是反对称矩阵$\Leftrightarrow AB = -BA$；

④若A是反对称矩阵，当k为偶数时，A^k是对称矩阵；当k为奇数时，A^k是反对称矩阵；

⑤若A是奇数阶的反对称矩阵，则A一定不可逆；若A是可逆的反对称矩阵，则A^{-1}也是反对称矩阵；

⑥若A是n阶反对称矩阵，则当n为偶数时，A^*也是反对称矩阵；当n为奇数时，A^*是对称矩阵；

⑦对任意的n阶矩阵A，有$A - A'$是反对称矩阵；

⑧实反对称矩阵的特征根是零或纯虚数.

7. 正交矩阵与正定矩阵

若n阶实矩阵A满足$AA' = A'A = I$，则称A为**正交矩阵**. 显然正交矩阵A可逆，且$A^{-1} = A'$. 单位矩阵是正交矩阵.

n阶实矩阵A是正交矩阵的充要条件是它的行(列)向量组为标准正交组.

正交矩阵的性质：

(1) n阶实矩阵A是正交矩阵$\Leftrightarrow A' = A^{-1}$；

(2) n阶矩阵A是正交矩阵$\Leftrightarrow A'$与A^{-1}是正交矩阵；

(3)若A是正交矩阵，则$|A| = \pm 1$；

(4)若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是正交矩阵,则 $\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵(但 $\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}$ 未必是正交矩阵);

(5)若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵,则 $\boldsymbol{A}^*$ 也是正交矩阵;

(6)若 λ 是正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征根,则 λ 的模等于1,且 $\frac{1}{\lambda}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征根.

若 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同于 n 阶单位矩阵 $\boldsymbol{E}$,即存在一个 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P'AP}=\boldsymbol{E}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵,则等价于下列各命题:

(1)存在 n 阶正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使

$$\boldsymbol{Q'AQ}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

其中 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征根,即 $\boldsymbol{A}$ 的特征根皆为正数.

(2) $\boldsymbol{A}$ 的所有顺序主子式全都大于零.

(3) $\boldsymbol{A}$ 的所有主子式全都大于零。

(4)对任意 n 维非零实列向量 $\boldsymbol{X}$,都有 $\boldsymbol{X'AX}>0$.

8. 幂等矩阵、幂零矩阵、对和矩阵

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$,若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**幂等矩阵**;若 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{0}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**幂零矩阵**;若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对和矩阵**.

幂等矩阵、对和矩阵、幂零矩阵的特征根分别为0或1,±1,0;幂等矩阵、对和矩阵可对角化,但幂零矩阵可对角化当且仅当它是零矩阵.

请读者自己研究它们的其它性质.

9. 伴随矩阵

设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$,A_{ij} 是元素 a_{ij} 在矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 中的代数余子式,则 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}^*=(A_{ji})$ 叫做矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**.

注1　伴随矩阵中的元素 A_{ji} 是按转置的顺序排列的.

注2　对于2阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$,可求得 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}a_{22}&-a_{12}\\-a_{21}&a_{11}\end{pmatrix}$,即2阶方阵的伴随矩阵具有“主对角元换位,副对角元变号”的规律.

伴随矩阵的性质：

(1) $|A^*| = |A|^{n-1}$；

(2) $(kA)^* = k^{n-1}A^*$；

(3) $(AB)^* = B^*A^*$；

(4) $(A^*)' = (A')^*$；$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$；

(5) $(A^*)^* = |A|^{n-2}A$.

10. 初等矩阵

单位矩阵经过一次初等变换而得到的矩阵叫做**初等矩阵**. 交换 i,j 两行(列)的初等矩阵叫做**换法矩阵**，记为 P_{ij}；将第 i 行(列)乘以非零常数 k 的初等矩阵叫做**倍法矩阵**，记为 $D_i(k)$；将第 j 行(第 i 列)的 k 倍加到第 i 行(第 j 列)的初等矩阵叫做**消法矩阵**，记为 $T_{ij}(k)$.

初等矩阵的性质：

(1) $|P_{ij}| = -1$，$|D_i(k)| = k \neq 0$，$|T_{ij}(k)| = 1$；

(2) 初等矩阵都是可逆的，并且它们的逆矩阵仍是同类的初等矩阵，即

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}, D_i(k)^{-1} = D_i\left(\frac{1}{k}\right), T_{ij}(k)^{-1} = T_{ij}(-k);$$

(3) 初等矩阵的转置矩阵仍是同类的初等矩阵，即

$$P'_{ij} = P_{ij}, D_i(k)' = D_i(k), T_{ij}(k)' = T_{ji}(k);$$

(4) 对 $m \times n$ 矩阵 A 作一次初等行变换就相当于在 A 的左边乘上相应的 m 阶的初等矩阵；对 A 作一次初等列变换就相当于在 A 的右边乘上相应的 n 阶的初等矩阵，即

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} P_{ij}A, A \xrightarrow{r_i \times k} D_i(k)A, A \xrightarrow{r_i + kr_j} T_{ij}(k)A;$$

$$A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} AP_{ij}, A \xrightarrow{c_i \times k} AD_i(k), A \xrightarrow{c_j + kc_i} AT_{ij}(k).$$

4.1.3 逆矩阵

令 A 是数域 F 上的一个 n 阶矩阵，若存在 F 上 n 阶矩阵 B，使得

$$AB = BA = E,$$

那么 A 叫做一个 n 阶**可逆矩阵**(或**非奇异矩阵**)，而 B 叫做 A 的**逆矩阵**.

若矩阵 A 可逆，则 A 的逆矩阵惟一，记为 A^{-1}.

1. 可逆矩阵的性质

(1) $|A^{-1}| = |A|^{-1}$;

(2)若 A 是 $m \times n$ 矩阵,P 是 m 阶可逆矩阵,Q 是 n 阶可逆矩阵,则

$$R(A) = R(PA) = R(AQ) = R(PAQ);$$

(3)若 A 是可逆矩阵,则 A 的逆矩阵 A^{-1} 也可逆,且 $(A^{-1})^{-1} = A$;

(4)若 A 是可逆矩阵,且 $k \neq 0$,则 kA 也可逆,且 $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$;

(5)若 A 和 B 都是 n 阶可逆矩阵,则 AB 也可逆,且 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

(6)若 A 是可逆矩阵,k 是任意正整数,则 A^k 也可逆,且 $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$;

(7)若 A 是可逆矩阵,则 A' 也可逆,且 $(A')^{-1} = (A^{-1})'$;

(8)若 A 是可逆矩阵,则 A^* 也可逆,且 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^* = \frac{1}{|A|}A$.

2. 可逆矩阵的判定

(1) n 阶矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$;

(2) n 阶矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow R(A) = n$,即存在 n 阶可逆矩阵 P,Q,使 $PAQ = I$;

(3) n 阶矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 的行(列)向量线性无关,即 A 是行(列)满秩阵;

(4) n 阶矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 可以通过初等变换(特别是只通过初等行(列)变换)化为 n 阶单位矩阵 E;

(5) n 阶矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 可以写成一些初等矩阵的乘积;

(6) n 阶矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 的 n 个特征根全不为零;

(7) n 阶矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow$ 对任意矩阵 B,有 $R(AB) = R(B)$;

(8)对于 n 阶矩阵 A,若存在 n 阶矩阵 B,使得 $AB = E$(或 $BA = E$),则 A 可逆,且 $A^{-1} = B$;

(9) n 阶矩阵 A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 的特征多项式 $f_A(\lambda) = |\lambda I - A|$ 的常数项非零.

3. 求逆矩阵的方法

(1)公式法(伴随矩阵法)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* .$$

此法在理论上很有用，在实际计算中常用于2阶或3阶矩阵.

(2)初等变换法

利用初等行变换

$$(A,E) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E,A^{-1}) ;$$

利用初等列变换

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix} ;$$

利用初等行、列变换

$$\begin{pmatrix} A & E \\ E & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行、列变换}} \begin{pmatrix} E & C \\ B & 0 \end{pmatrix} ,$$

则 $CAB = E$，故 $A^{-1} = BC$.

注 利用初等变换法还可求 $A^{-1}B$ 与 CA^{-1}：

利用初等行变换

$$(A,B) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (E,A^{-1}B) ;$$

利用初等列变换

$$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ CA^{-1} \end{pmatrix} .$$

(3)利用解线性方程组来求逆矩阵

当 A 是 n 阶可逆矩阵，则线性方程组 $Ax = b$ 有惟一解，依次取 $b = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 时，以线性方程组的解向量为列所得到的矩阵就是 A^{-1}.

(4)利用特征多项式求逆矩阵

若 A 是可逆矩阵，则 A 的特征多项式 $f_A(\lambda) = |\lambda I - A| = \sum_{i=0}^{n} a_i\lambda^i$ 的常数项 $a_0 \neq 0$，且由哈密顿 - 凯莱(Hamilton - Cayley)定理知 $f(A) = 0$，即 $\sum_{i=0}^{n} a_iA^i = 0$，所以

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(a_nA^{n-1} + \cdots + a_1E)，其中 a_n = 1 .$$

当已知可逆矩阵的特征多项式时,按照上面的公式很容易找到 A^{-1},且任意可逆矩阵 A 的逆矩阵必是 A 的一个多项式.

4.1.4 等价矩阵

若矩阵 A 可以经过一系列初等变换变成 B,则称 A 与 B **等价**,记为 $A \sim B$ 或 $A \to B$.

1. 等价矩阵的性质

(1)等价具有反身性、对称性与传递性,即 $A \sim A$;若 $A \sim B$,则 $B \sim A$;若 $A \sim B, B \sim C$,则 $A \sim C$.

(2)秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵 A 等价于形如

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的 $m \times n$ 矩阵(称为 A 的等价标准形),它是由 A 惟一确定的.

2. 等价矩阵的充要条件

假设矩阵 A 与 B 都是 $m \times n$ 矩阵.

(1) $A \sim B \Leftrightarrow A$ 与 B 的等价标准形相同;

(2) $A \sim B \Leftrightarrow A$ 与 B 的秩相同;

(3) $A \sim B \Leftrightarrow$ 存在初等矩阵 $P_1, \cdots, P_s$ 与 $Q_1, \cdots, Q_t$,使得

$$B = P_1, \cdots, P_s A Q_1, \cdots, Q_t;$$

(4) $A \sim B \Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵 P 与 Q,使得 $B = PAQ$.

若 $A \sim B$,可作如下变换

$$\begin{pmatrix} A & E_m \\ E_n & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行、列变换}} \begin{pmatrix} B & P \\ Q & 0 \end{pmatrix},$$

求得可逆矩阵 P 与 Q,使 $PAQ = B$.

矩阵的等价关系决定矩阵的一个分类,互相等价的矩阵属于同一个类,即组成一个集合,称为**矩阵的等价类**. 全体 n 阶矩阵分为 $n+1$ 个互不相同的等价类.

4.1.5 分块矩阵

用横线和竖线将矩阵分成若干小块后所得到的矩阵叫做**分块矩阵**. 把一个大矩阵看成是由一些小矩阵(子块)组成的,如同矩阵是由数组成的一样,把这些小矩阵当作数一样来处理,从而进行运算.

1. 分块矩阵的运算律

只要进行运算的矩阵的分块适当,分块矩阵有类似于普通矩阵的运算规律.

(1)加法 两个同型矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,若按同一种分法分块为 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}$,$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{B}_{ij})_{s\times t}$,则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}_{ij}+\boldsymbol{B}_{ij})_{s\times t}.$$

(2)数乘 $$k\boldsymbol{A}=(k\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}.$$

(3)乘法 将两个可乘矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$ 分块为 $\boldsymbol{A}=(A_{ij})_{r\times l}$,$\boldsymbol{B}=(B_{ij})_{l\times t}$,则

$$\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{C}_{ij})_{r\times t},$$

其中 $\boldsymbol{C}_{ij}=\boldsymbol{A}_{i1}\boldsymbol{B}_{1j}+\boldsymbol{A}_{i2}\boldsymbol{B}_{2j}+\cdots+\boldsymbol{A}_{il}\boldsymbol{B}_{lj}=\sum\limits_{k=1}^{l}\boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj}$.

注 两个可乘矩阵只有当第一个矩阵列的分法与第二个矩阵行的分法一致时才能相乘. 两个分块矩阵相乘时,只需按普通矩阵乘法规则,把小块当作数一样来对待,然后对每两个小块之积按普通矩阵乘法规则计算之.

(4)转置 设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{A}_{ij})_{s\times t}$,则 $\boldsymbol{A}'=(\boldsymbol{A}'_{ji})_{t\times s}$.

2. 准对角矩阵

(1)形如

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_r\end{pmatrix},\boldsymbol{A}_i \text{ 为 } n_i \text{ 阶方阵}(i=1,2,\cdots,r)$$

的分块矩阵叫做**准对角矩阵(分块对角矩阵)**.

(2)对于两个有相同分块的准对角矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_r\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_1 & & & \\ & \boldsymbol{B}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_r\end{pmatrix}$$

有

$$A+B=\begin{pmatrix} A_1+B_1 & & & \\ & A_2+B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r+B_r \end{pmatrix};$$

$$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_rB_r \end{pmatrix};$$

$$A^k=\begin{pmatrix} A_1^k & & & \\ & A_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r^k \end{pmatrix};$$

$$|A|=|A_1||A_2|\cdots|A_r|;$$

当 $A_i(i=1,2,\cdots,r)$ 均可逆时,A 也可逆,且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & & \\ & A_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r^{-1} \end{pmatrix}.$$

注　对于形如

$$A=\begin{pmatrix} & & & A_1 \\ & & A_2 & \\ & \iddots & & \\ A_r & & & \end{pmatrix}$$

的分块矩阵,当 $A_i(i=1,2,\cdots,r)$ 均可逆时,A 可逆,且

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} & & & A_r^{-1} \\ & & \iddots & \\ & A_2^{-1} & & \\ A_1^{-1} & & & \end{pmatrix}.$$

3. 四分块三角矩阵

(1)形如

$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}$,其中$A,B$均为方阵 的分块矩阵叫做**四分块三角矩阵**.

(2)当A,B均可逆时,四分块三角矩阵的逆矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \\ 0 & B^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \end{pmatrix}.$$

注 对于形如

$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix}$或$\begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix}$,其中$A,B$均为方阵的四分块矩阵,当$A,B$均可逆时,它们的逆矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & A \\ B & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-1}CB^{-1} \end{pmatrix}.$$

4. 分块初等矩阵

(1)分块矩阵的初等行变换

下面三种变换称为**分块矩阵的初等行变换**:

①把一个分块矩阵的两个块行互换位置;

②用一个可逆矩阵左乘(或右乘)一个分块矩阵的某一个块行;

③把一个分块矩阵的一个块行的P(矩阵)倍加到另一个块行上.

类似地,可以定义**分块矩阵的初等列变换**.分块矩阵的初等行变换和分块矩阵的初等列变换又统称为**广义的初等变换**.

注 分块矩阵的初等行(列)变换不是矩阵的初等行(列)变换.

(2)分块初等矩阵

①分块单位矩阵(即把单位矩阵分块得到的分块矩阵)经过一次分块矩阵的初等变换得到的矩阵称为**分块初等矩阵**(或**广义初等矩阵**).

注 分块初等矩阵不是初等矩阵.

例如,将$m+n$阶单位矩阵分块为

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ 0 & E_n \end{pmatrix},$$

互换它的两行(列)得

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_n \\ \boldsymbol{E}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix};$$

某一行(列)乘可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{P} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & 0 \\ 0 & \boldsymbol{P} \end{pmatrix};$$

把某一行(列)乘矩阵 $\boldsymbol{P}$ 加到另一行(列)得

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \boldsymbol{P} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{P} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}.$$

这些矩阵都是分块初等矩阵.

② 分块初等矩阵均是可逆矩阵,例如

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_n \\ \boldsymbol{E}_m & \mathbf{0} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_m \\ \boldsymbol{E}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{P} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \mathbf{0} \\ 0 & \boldsymbol{P}^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & P \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & -P \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix},\begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \mathbf{0} \\ P & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & \mathbf{0} \\ -P & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}.$$

③ 对一个分块矩阵 $\boldsymbol{A}$ 作一次分块矩阵的初等行(列)变换,就相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边(右边)乘上一个相应的分块初等矩阵.

4.1.6　可对角化的矩阵

1. 矩阵的特征根和特征向量

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,若存在数 λ 和一个 n 维非零列向量 $\boldsymbol{X}$,使得 $\boldsymbol{AX} = \lambda\boldsymbol{X}$,即

$$(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \mathbf{0},$$

则称 λ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征根**(或**特征值**),而非零向量 $\boldsymbol{X}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征根 λ 的**特征向量**. 又称 $f_A(\lambda) = |\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**.

2. 相似矩阵

设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵,若存在一个 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$,使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}$,则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相似**. 特别地,若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和对角矩阵 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,$

λ_n)相似,则称A**可对角化**,且diag($\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$)为$A$的相似标准形.

相似矩阵有相同的特征多项式,因而有相同的特征根.

3. 矩阵可对角化的条件

(1)充分条件

n阶方阵A在数域F上有n个单根,则A在F上一定可对角化.

(2)充要条件

数域F上n阶方阵A在F上可对角化$\Leftrightarrow A$有n个线性无关的特征向量$\Leftrightarrow A$的特征根全在F内,且对A的每一特征根λ,都有$R(\lambda I-A)=n-\lambda$的重数$\Leftrightarrow A$的最小多项式是数域F上互素的一次因式的乘积.

n阶复矩阵A可对角化$\Leftrightarrow A$的最小多项式无重根$\Leftrightarrow A$的初等因子全是一次的$\Leftrightarrow A$的不变因子都无重根.

(3)实对称阵可对角化

设A为n阶实对称阵,则存在一个n阶正交阵Q,使

$$Q'AQ=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n),$$

其中$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$是$A$的全部特征根(都是实数),即实对称阵的特征根都是实数,且可对角化.

4.1.7 方阵的 Jordan 标准形和最小多项式

1. 方阵的Jordan标准形

形如

$$J(\lambda_0,t)=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & & \\ 1 & \lambda_0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_0\end{pmatrix}$$

的矩阵称为一个t阶Jordan(**若当**)**块**,由若干个若当块组成的准对角矩阵

$$J=\begin{pmatrix}J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s\end{pmatrix},J_i\text{ 是 }n_i\text{ 阶若当块},i=1,2,\cdots,s$$

称为Jordan(**若当**)**形矩阵**.

一阶若当块就是一阶矩阵. 对角形矩阵是若当形矩阵,但反之不然.

每个 n 阶的复数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都与一个若当形矩阵相似,这个若当形矩阵除去其中若当块的排列次序外是由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 惟一决定的,它称为 $\boldsymbol{A}$ 的**若当标准形**,即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的若当标准形是惟一的.

2. 方阵的最小多项式

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,$f(x)\in F[x]$,若 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$,则称 $f(x)$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**化零多项式**,$\boldsymbol{A}$ 的次数最低的首项系数为 1 的化零多项式叫做 $\boldsymbol{A}$ 的**最小多项式**.

最小多项式的性质:

1. 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式是惟一的.

2. 方阵 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式一定整除它的特征多项式.

3. 准对角矩阵的最小多项式是其对角线上子块的最小多项式的最小公倍式.

4. 一个矩阵是数量矩阵当且仅当其最小多项式是一次的.

5. 相似矩阵有相同的最小多项式.

哈密顿－凯莱(Hamilton－Cayley)定理:设 $f(x)$ 为 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式,则 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}$,即 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式是 $\boldsymbol{A}$ 的化零多项式.

4.1.8　λ－矩阵

1. 有关概念

元素是关于 λ 的多项式的矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 叫做 λ－矩阵.

$\boldsymbol{A}(\lambda)$ 中非零子式的最大阶数叫做它的秩.

设 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 是 n 阶的 λ－矩阵,若存在一个 n 阶的 λ－矩阵 $\boldsymbol{B}(\lambda)$,使

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\boldsymbol{B}(\lambda)=\boldsymbol{B}(\lambda)\boldsymbol{A}(\lambda)=\boldsymbol{I}_n,$$

则称 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 是可逆的,且 $\boldsymbol{B}(\lambda)$ 称为 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 的逆矩阵.

λ－矩阵的初等变换是指下列三种变换:

(1)矩阵的两行(列)互换位置;

(2)矩阵的某一行(列)乘以非零常数 k;

(3)矩阵的某一行(列)的 $\varphi(\lambda)$ 倍加到另一行(列)上去,其中 $\varphi(\lambda)$ 是 λ 的多项式.

λ－矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 经过一系列初等变换变为 $\boldsymbol{B}(\lambda)$,则称 $\boldsymbol{A}(\lambda)$ 与

$B(\lambda)$ 等价.

任意一个秩为 r 的非零 n 阶 λ - 矩阵 $A(\lambda)$ 都等价于 λ - 矩阵

$$D(\lambda)=\begin{pmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $r>0, d_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,r)$ 是首项系数为 1 的多项式,且 $d_i(\lambda) \mid d_{i+1}(\lambda)(i=1,2,\cdots,r-1)$. 称 $D(\lambda)$ 为 $A(\lambda)$ 的标准形. λ - 矩阵的标准形是惟一的.

λ - 矩阵 $A(\lambda)$ 等价标准形中主对角线上非零元素 $d_1(\lambda),\cdots,d_r(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的**不变因子**. 特别地,矩阵 A 的特征矩阵 $\lambda I-A$ 的不变因子称为 A 的不变因子.

λ - 矩阵 $A(\lambda)$ 中全部 k 阶子式的首项系数为 1 的最大公因式称为 $A(\lambda)$ 的 **k 阶行列式因子**, $1\leqslant k\leqslant R[A(\lambda)]$.

矩阵 A 的每个次数 >0 的不变因子在复数域内分解成互异的一次因式方幂的乘积,所有这些一次因式方幂(相同的必须按出现的次数计算)称为 A 的**初等因子**.

2. 有关结论

(1) λ - 矩阵 $A(\lambda)$ 可逆 $\Leftrightarrow |A(\lambda)|=k\neq 0$.

(2)两个 λ - 矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价 $\Leftrightarrow$ 它们具有相同的行列式因子 $\Leftrightarrow$ 它们具有相同的不变因子 $\Leftrightarrow$ 有可逆 λ - 矩阵 $P(\lambda),Q(\lambda)$,使 $B(\lambda)=P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$.

(3)数域 F 上两个 n 阶方阵 A,B 相似 $\Leftrightarrow$ 它们的特征矩阵等价 $\Leftrightarrow$ 它们具有相同的行列式因子 $\Leftrightarrow$ 它们具有相同的不变因子 $\Leftrightarrow$ 它们具有相同的初等因子.

(4)数域 F 上的 n 阶方阵 A 的最小多项式为 A 的最后一个不变因子; A 的特征多项式在 F 上的任意不可约因式都是 A 的最小多项式的因式.

(5) n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的任意特征根必是 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式的复根;若 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互异的特征根,则 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式是其特征多项式.

3. 若当标准形的求法

求 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的若当标准形的步骤:

(1)求 $\boldsymbol{A}$ 的特征矩阵 $\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 的等价标准形;

(2)求 $\boldsymbol{A}$ 的全部初等因子;

(3)对每一个初等因子作一个若当块,进而求出 $\boldsymbol{A}$ 的若当标准形.

4.2 重点和难点

本章的重点是:矩阵的运算以及它们的运算规律,可逆矩阵,初等矩阵.

本章的重点是掌握矩阵的运算以及它们的运算规律. 由于矩阵的运算和熟知的数的运算规律有些是相同的,但也有许多不同之处,这些不同之处正是易犯错误的地方. 因此,矩阵的运算及其运算规律成为本章的一个重点.

可逆矩阵是最重要的一类矩阵,在研究矩阵时经常用到. 求可逆矩阵的逆矩阵是一项基本工作,求逆矩阵的方法必须熟练掌握. 伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 是为计算逆矩阵而引入的,但在具体求逆矩阵时,只对低阶矩阵(特别是 2 阶矩阵)采用伴随矩阵法进行计算,对 2 阶以上的矩阵利用初等变换法求逆矩阵更方便.

在涉及伴随矩阵的有关计算及证明时,往往利用伴随矩阵的基本公式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$(当 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时)来推证及化简.

本章中,对于矩阵的秩、矩阵等价问题的讨论,可逆矩阵都有直接的意义. 以后的各章中,对于矩阵合同、相似等问题的讨论,可逆矩阵都是必不可少的. 实际上,可逆矩阵贯穿于线性代数理论的始终. 因此可逆矩阵成为本章的一个重点.

初等变换在矩阵理论的研究中有重要作用,是一种基本方法与基本步骤. 而初等矩阵则把矩阵的初等变换转化为矩阵左(右)乘一初等

矩阵，从而，可逆矩阵表示为初等矩阵的乘积，两矩阵等价通过初等矩阵表示为等式. 因此，初等矩阵成为本章的一个重点.

本章的难点是：初等矩阵，分块矩阵.

利用初等矩阵以及分块初等矩阵可以将矩阵的初等变换和分块矩阵的分块初等变换转化为矩阵的乘法运算，对于解决一些涉及矩阵的理论和计算题很有用，但推证过程有一定的技巧.

4.3　例题解析

4.3.1　矩阵的分解及其因子矩阵的求法

矩阵的分解形式大致分为两种情形：分解之和的形式；分解之积的形式.

1. 矩阵分解之和的方法

例1　任意秩为 $r(>0)$ 的矩阵都可表为 r 个秩为 1 的矩阵的和.

证明　设 $m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，则必存在 m 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$，使

$$\boldsymbol{PAQ}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix},$$

而

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}_{11}+\boldsymbol{E}_{22}+\cdots+\boldsymbol{E}_{rr},$$

其中 $\boldsymbol{E}_{ii}$ 是(i,i) 元为1 而其余元为0 的 $m\times n$ 矩阵，显然 $R(\boldsymbol{E}_{ii})=1$.
因此

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}_{11}\boldsymbol{Q}^{-1}+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}_{22}\boldsymbol{Q}^{-1}+\cdots+\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}_{rr}\boldsymbol{Q}^{-1},$$

即矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表为 r 个矩阵的和，并且这 r 个矩阵的秩显然都是 1.

例2　任何一个 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 均可表示为一个对称阵 $\boldsymbol{B}$ 与一个反对称阵 $\boldsymbol{C}$ 之和，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{B}'=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}'=-\boldsymbol{C}$；且这种分解形式惟一.

证明　先证可表性.

由 $\boldsymbol{A}$ 构造两个矩阵，令

$$B = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}A',$$

$$C = \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A',$$

显然，$B' = B, C' = -C$，即 B 是对称阵，C 是反对称阵，且 $A = B + C$.

再证表法惟一性.

设 $A = B_1 + C_1$，且 $B'_1 = B_1, C'_1 = -C_1$ 故 $B + C = B_1 + C_1$，即 $B - B_1 = C_1 - C$，这个等式表明 $B - B_1$ 与 $C_1 - C$ 既是对称阵又是反对称阵，于是 $B - B_1 = 0, C_1 - C = 0$，即 $B = B_1, C_1 = C$.

思考：对称阵 B 与反对称阵 C 的构成是怎样想出来的？B 与 C 的乘积是否可交换？BC 是否为一个反对称阵？试找出 BC 为一反对称阵的充要条件.

例 3　任意一个 n 阶方阵 A 均可表示为一个数量矩阵与一个迹为零的方阵之和.

证明　设 $A = (a_{ij})$，令

$$B = \frac{1}{n}(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})E_n = \frac{1}{n}tr(A)E_n,$$

$$C = (c_{ij}), c_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \neq j; \\ a_{ii} - \frac{1}{n}tr(A), & i = j. \end{cases}$$

B 显然是 n 阶数量阵，而矩阵 C 的迹为

$$tr(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = a_{11} - \frac{tr(A)}{n} + \cdots + a_{nn} - \frac{tr(A)}{n} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} - tr(A) = 0.$$

同时，

$$B + C = \begin{pmatrix} \frac{tr(A)}{n} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{tr(A)}{n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} - \frac{tr(A)}{n} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - \frac{tr(A)}{n} \end{pmatrix} = A.$$

思考：此表法是否惟一？

2. 矩阵分解之积的方法

例 4　设 A 是秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵，证明：存在 m 阶可逆矩阵 P，$r \times$

n 行满秩阵 Q_1，使 $PA = \begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix}$，其中 0 是 $(m-r)\times n$ 零矩阵.

证明　由于 $R(A)=r$，则存在 m 阶可逆矩阵 P，n 阶可逆矩阵 Q，使

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

则 $PA = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q^{-1}$. 令 $Q^{-1} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$，其中 Q_1 为 $r\times n$ 行满秩阵，则

$$PA \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

上一章的满秩分解定理也属于矩阵分解之积的问题.

例5　设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为不同的 n 维实列向量，若 $|\boldsymbol{\alpha}|=|\boldsymbol{\beta}|$，则存在 n 阶实镜像阵 H，使 $H\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

证明　作单位向量

$$u = \frac{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|},$$

则
$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} - u|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|.$$

而 $|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2 = (\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) = (\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}$，由于 $|\boldsymbol{\alpha}|=|\boldsymbol{\beta}|$，且 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}'\boldsymbol{\alpha}$，因此

$$|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|^2 = 2(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})'\boldsymbol{\alpha},\ |\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}| = 2\left(\frac{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}|}\right)'\boldsymbol{\alpha} = 2u'\boldsymbol{\alpha}.$$

于是　$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} - u|\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}| = \boldsymbol{\alpha} - 2uu'\boldsymbol{\alpha} = (I_n - 2uu')\boldsymbol{\alpha}$.

令 $H = I_n - 2uu$ 即为 n 阶实镜像阵，使 $H\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

例6　设 A 为任意 n 阶实阵，则必有分解式 $A=QR$，其中 Q 为 n 阶正交阵，R 为主对角元皆为非负数的 n 阶上(下)三角阵. 这种分解称为实方阵的 QR 分解.

证明　设 $A=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$. 对 A 的阶数 n 用第一数学归纳法证之.

当 $n=1$ 时，因为

$$a_{11} = \begin{cases} 1\cdot a_{11}, & \text{当 } a_{11}\geqslant 0; \\ (-1)\cdot(-a_{11}), & \text{当 } a_{11}<0. \end{cases}$$

即结论对 $n=1$ 的情形是成立的.

假设 $n-1$ 时结论成立，往证 n 时结论成立. 分两种情况讨论:

(1)若 $\boldsymbol{\alpha}_1=0$，则 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & *\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}$，其中 $\boldsymbol{A}_1$ 是 $n-1$ 阶方阵，由归纳假设知 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{R}_1$，其中 $\boldsymbol{Q}_1$ 是 $n-1$ 阶正交阵，$\boldsymbol{R}_1$ 是主对角元皆为非负数的 $n-1$ 阶上三角阵，于是

$$A=\begin{pmatrix}0 & *\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & *\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}_1\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}_1\end{pmatrix}\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0 & *\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}_1\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$，显然 $\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R}$ 分别是 n 阶正交阵与主对角元皆为非负数的 n 阶上三角阵.

(2)若 $\boldsymbol{\alpha}_1\neq\boldsymbol{0}$，则令 $\boldsymbol{\beta}_1=(|\boldsymbol{\alpha}_1|,0,\cdots,0)'$，易知 $|\boldsymbol{\beta}_1|=|\boldsymbol{\alpha}_1|$，根据例 5，存在一个 n 阶实镜像阵 $\boldsymbol{H}$，使 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\beta}_1$. 于是

$$\boldsymbol{HA}=(\boldsymbol{H}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{H}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{H}\boldsymbol{\alpha}_n)=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{H}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{H}\boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}|\boldsymbol{\alpha}_1| & *\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}.$$

其中 $|\boldsymbol{\alpha}_1|>0$，$\boldsymbol{A}_1$ 是 $n-1$ 阶方阵，由归纳假设知 $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{R}_1$，其中 $\boldsymbol{Q}_1$ 是 $n-1$ 阶正交阵，$\boldsymbol{R}_1$ 是主对角元皆为非负数的 $n-1$ 阶上三角阵. 又实镜像阵 $\boldsymbol{H}$ 是正交阵，有 $\boldsymbol{H}^{-1}=\boldsymbol{H}$，于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H}^{-1}\begin{pmatrix}|\boldsymbol{\alpha}_1| & *\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1\end{pmatrix}=\boldsymbol{H}\begin{pmatrix}|\boldsymbol{\alpha}_1| & *\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{R}_1\end{pmatrix}=\boldsymbol{H}\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}|\boldsymbol{\alpha}_1| & *\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}_1\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{H}\begin{pmatrix}1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}_1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}|\alpha_1| & *\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R}_1\end{pmatrix}$，即 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$，易知 $\boldsymbol{Q},\boldsymbol{R}$ 分别是 n 阶正交阵与主对角元皆为非负数的 n 阶上三角阵.

思考: n 阶可逆实方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $\boldsymbol{QR}$ 分解式中 $\boldsymbol{R}$ 是什么样的三角阵? 这样的分解式是否惟一? 为什么?

4.3.2 矩阵方程的解法

含有未知矩阵的方程叫做**矩阵方程**. 求解矩阵方程时，要先作恒等变形将方程化简，再代入已知条件求解. 不要一开始就代入已知数据，那样常常使运算复杂化，费时易错. 化简时要正确把握矩阵的重要公式、性质，先将给出的关系式变形为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{C}$，或 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{C}$，或 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$

的形式. 当 A,B 不可逆阵时,将 X 的元素作为未知量,根据矩阵乘积与相等矩阵的概念,得到线性方程组,解方程组即得到 X;当 A,B 是可逆矩阵时,通过左乘或右乘可逆矩阵就可求出 $X = A^{-1}C$,或 $X = CA^{-1}$,或 $X = A^{-1}CB^{-1}$.

例7 设 A 为四阶方阵,

$$B=\begin{pmatrix}1&2&-3&-2\\0&1&2&-3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

且 $(2I-C^{-1}B)A'=C^{-1}$,求 A.

解 将 $(2I-C^{-1}B)A'=C^{-1}$ 两边左乘 C 得 $(2C-B)A'=I$,而

$$2C-B=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

可逆,故 $A=[(2C-B)^{-1}]'=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$

例8 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$,且 $A^*X(\frac{1}{2}A^*)^*=8A^{-1}X+I$,求矩阵 X.

解 可求得 $|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&-1\\0&2&0\\0&-2&2\end{vmatrix}=4$,因此

$A^*=|A|A^{-1}=4A^{-1}$. 于是由 $A^*X(\frac{1}{2}A^*)^*=8A^{-1}X+I$,得

$$4A^{-1}X(2A^{-1})^*=8A^{-1}X+I\Rightarrow 4A^{-1}X|2A^{-1}|(2A^{-1})^{-1}=8A^{-1}X+I,$$

即 $$4A^{-1}XA=8A^{-1}X+I.$$

两边左乘 A 得 $$4XA=8X+A,$$

即 $4X(A-2I)=A$,故 $X=\frac{1}{4}A(A-2I)^{-1}$.

易求得$(A-2I)^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$,从而

$$X=-\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}=\frac{1}{4}A(A-2I)^{-1}$$

4.3.3 可逆矩阵的判定方法和技巧

1. 因式分解法

判断方阵$A+B$是否可逆,其基本思想方法是将已知关系式变形,分解为$(A+B)C=I$或$C(A+B)=I$的形式,于是$A+B$是可逆的,且$(A+B)^{-1}=C$.

例 9 设A为n阶方阵,且满足$(A-I)^2=3(A+I)^2$. 现有4个结论:

(1)A可逆; (2)$A+I$可逆; (3)$A+2I$可逆; (4)$A+3I$可逆. 其中正确的有( ).

(A)1个; (B)2个; (C)3个; (D)4个

解 由$(A-I)^2=3(A+I)^2$得$A^2+4A+I=0$,即$A^2+4A=-I$

$\Leftrightarrow A[-(A+4I)]=I\Leftrightarrow(A+I)(A+3I)=2I\Leftrightarrow(A+2I)(A+2I)=3I$. 于是$A,A+I,A+2I,A+3I$都可逆,故选(D).

例 10 设A为n阶方阵,若$A^k=0$($k\geqslant2$)且$R(A)=1$,则$I-A$是可逆阵,并求$(I-A)^{-1}$.

证明 由于

$$(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1})=I-A^k=I,$$

故$I-A$是可逆阵,并且$(I-A)^{-1}=I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}$.

但由$R(A)=1$知A的任意两行(或列)都成比例,因此可设

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,\cdots,b_n)$$

于是$A^2=(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)A$,令$a=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$,即$A^2=aA$,从而

$$A^3 = a^2A, A^4 = a^3A, \cdots, A^k = a^{k-1}A.$$

因为$A^k = 0, A \neq 0, k \geqslant 2$,则得$a = 0$,即$A^2 = 0$,所以$(I - A)^{-1} = I + A$.

例 11 设A与B分别是$m \times n$矩阵与$n \times m$矩阵,试证$I_m - AB$是可逆阵的充要条件是$I_n - BA$是可逆阵.

证明 由于

$$(I_m - AB)A = A(I_n - BA),$$

所以,若$I_m - AB$可逆,则

$$A = (I_m - AB)^{-1}A(I_m - BA)$$

从而

$$I_n = (I_n - BA) + BA = (I_n - BA) + B(I_m - AB)^{-1}A(I_n - BA)$$
$$= [I_n + B(I_m - AB)^{-1}A](I_n - BA).$$

故$I_n - BA$是可逆阵,且$(I_n - BA)^{-1} = I_n + B(I_m - AB)^{-1}A$.

同理,由$I_n - BA$可逆,可证$I_m - AB$可逆,且

$$(I_m - AB)^{-1} = I_m + A(I_n - BA)^{-1}B.$$

思考:$I_m - AB$与$I_n - BA$的行列式是否相等?为什么?

2. 可逆矩阵乘积法

如果一个矩阵可以表示为几个可逆矩阵的乘积,那么这个矩阵一定可逆,用这种方法可以判定可逆矩阵,但技巧性一般较强.

例 12 设A, B及$AB - I$都是n阶可逆矩阵,证明:

(1) $A - B^{-1}$为可逆矩阵,并求其逆;

(2) $(A - B^{-1})^{-1} - A^{-1}$也是可逆矩阵,并求其逆.

证明 (1)因为$B, AB - I$都是n阶可逆阵,于是

$$A - B^{-1} = A(BB^{-1}) - IB^{-1} = (AB - I)B^{-1},$$

故$A - B^{-1}$为可逆矩阵,且$(A - B^{-1})^{-1} = B(AB - I)^{-1}$.

(2)因为

$(A - B^{-1})^{-1} - A^{-1} = B(AB - I)^{-1} - A^{-1} = [B - A^{-1}(AB - I)](AB - I)^{-1}$ $= A^{-1}(AB - I)^{-1}$,所以$(A - B^{-1})^{-1} - A^{-1}$也是可逆矩阵,且$((A - B^{-1})^{-1} - A^{-1})^{-1} = (AB - I)A$.

或因为

$$[(A - B^{-1})^{-1} - A^{-1}](A - B^{-1}) = A^{-1}B^{-1},$$

即
$$(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}=A^{-1}B^{-1}(A-B^{-1})^{-1},$$
所以 $(A-B^{-1})^{-1}-A^{-1}$ 是可逆阵,且
$$((A-B^{-1})^{-1}-A^{-1})^{-1}=(A-B^{-1})BA=(AB-I)A.$$

3. 行列式法

例 13 设 A 是奇数阶矩阵, $|A|>0$,又 $AA'=I_n$,证明 I_n-A 是不可逆矩阵.

证明 由 A 是奇数阶矩阵,且 $AA'=I_n$ 得

$|I_n-A|=|AA'-A|=|A(A'-I_n)|=|A||A'-I_n|=(-1)^n|A||I_n-A|=-|A||I_n-A|$,即 $(1+|A|)|I_n-A|=0$,又因为 $|A|>0$,故 $|I_n-A|=0$,因而 I_n-A 是不可逆矩阵.

例 14 设 A,B 都是 n 阶正交矩阵,且 $|A|+|B|=0$,则 $A+B$ 是不可逆矩阵.

证明 由 A,B 都是 n 阶正交矩阵,则 $AA'=BB'=I$,于是
$$A+B=A(I+A'B)=A(B'B+A'B)=A(A+B)'B,$$
所以
$$|A+B|=-|A|^2|A+B|=-|A+B|,$$
即 $|A+B|=0$,因而 $A+B$ 是不可逆矩阵.

4. 行(或列)秩法

例 15 设 A 是 n 阶可逆阵,且每行元素之和都是 k,则 $k\neq 0$,且 A^{-1} 的每行元素之和都是 $\frac{1}{k}$.

证明 **方法 1** 反证法. 假设 $k=0$,则 n 阶方阵 A 的 n 个列向量之和是零向量,即 A 的 n 个列向量线性相关,从而 A 不可逆,与 A 可逆矛盾,故 $k\neq 0$.

同时,由题设条件得
$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix},$$
两边左乘 A^{-1} 和 $\frac{1}{k}$ 可得 $A^{-1}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{k}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$,

此式说明 A^{-1} 的每行元素之和都是 $\frac{1}{k}$.

方法2　因为 $0 \neq |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} 1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k(A_{11} + A_{21} + \cdots + A_{n1})$,所以 $k \neq 0$(同理把 $|A|$ 的各列都加到第 i 列上有 $A_{1i} + A_{2i} + \cdots + A_{ni} \neq 0$,且 $\frac{A_{1i} + A_{2i} + \cdots + A_{ni}}{|A|} = \frac{1}{k}$).

由于 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^* = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$,而 $\frac{A_{1i} + A_{2i} + \cdots + A_{ni}}{|A|} = \frac{1}{k}$ 说明 A^{-1} 的每行元素之和都是 $\frac{1}{k}$.

思考:题设中的 k 是 n 阶方阵 A 的什么?而向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ 又是 A 的什么?对任意一个自然数 m ,A^m 的每行元素之和是否都为 k^m ?

5. 利用齐次线性方程组只有零解的判逆法

例16　设 A,B 都是 n 阶实矩阵,$B' = B$,且 $AB + BA'$ 是正定阵,证明 B 是可逆矩阵.

证明　由于 $AB + BA'$ 是正定阵,即对任意非零 n 维实列向量 X,都有

$$X'(AB + BA')X = (A'X)'(BX) + (BX)'(A'X) > 0.$$

即对任意非零 n 维实列向量 X,总有 $BX \neq 0$,这说明齐次线性方程组 $BX = 0$ 只有零解,因此 B 是可逆矩阵.

6. 广义初等变换法

使用广义初等变换的方法,来论证高阶分块矩阵的奇异性及求逆是非常方便的,但运用此法的技巧性较强.

例17　用广义初等变换法证明例11:设 A 与分别是 $m \times n$ 矩阵与 $n \times m$ 矩阵,试证 $I_m - AB$ 是可逆阵的充要条件是 $I_n - AB$ 是可逆阵.

证明　由于

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & B \\ 0 & I_m - AB \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} I_n & B \\ A & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n - BA & B \\ 0 & I_m \end{pmatrix}$$

故 $|I_m - AB| = |I_n - BA|$，因此 $I_m - AB$ 可逆的充要条件是 $I_n - BA$ 可逆.

7. 特征多项式求逆法

例18　设 A 是数域 F 上的 n 阶可逆阵，证明 A^{-1} 与 A^* 均可表为 A 的系数在 F 中的多项式.

证明　设 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ 是矩阵 A 的特征多项式，则 $a_0 = (-1)^n|A|$. 因为 A 是可逆阵，即 $|A| \neq 0$，故 $a_0 \neq 0$. 由哈密顿－凯莱(Hamilton－Cayley)定理知 $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \cdots + a_1A + a_0I = 0$，即

$$-\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1I)A = I.$$

因此，$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1I)$ 是 A 的系数在 F 中的多项式.

因为 $AA^* = |A|I$，于是

$$\begin{aligned} A^* &= |A|A^{-1} = (-1)^n a_0\left[-\frac{1}{a_0}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1I)\right] \\ &= (-1)^{n+1}(A^{n-1} + a_{n-1}A^{n-2} + \cdots + a_1I) \end{aligned}$$

也是 A 的系数在 F 中的多项式.

4.3.4　方阵高次幂的求法

计算一个 n 阶方阵的高次幂或多项式是矩阵论中的基本运算问题，通常情况下是较麻烦的，尤其是给定的矩阵的阶数及其多项式的次数都较高时，计算量之大是相当困难的事. 因此，就需要运用一些技巧来寻求简捷方法进行计算.

常用以下几种方法：

1. 相似标准形法

若 A 与 n 阶对角矩阵 Λ 相似，则总可求出一个 n 阶可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP = \Lambda$，于是

$$A^k = P\Lambda^k P^{-1}.$$

若 A 不与对角矩阵相似，即 A 不可对角化，则总可求出一个 n 阶可

逆矩阵 P,使 $P^{-1}AP = J$,其中 J 是 A 的 Jordan 标准形. 于是

$$A^k = PJ^kP^{-1}.$$

2. 降次法

定理　设 A 为一个 n 阶方阵,对数域 F 上任意一个多项式 $g(x)$,则必存在一个多项式 $r(x)$,其中 $\partial^\circ(r(x)) < n$ 或 $r(x) = 0$ 使 $g(A) = r(A)$.

证明　事实上,用 A 的特征多项式 $f_A(x)$(n 次的)作除式,对任意多项式 $g(x)$ 做带余除法得

$$g(x) = f_A(x)q(x) + r(x),$$

则 $r(x) = 0$ 或 $\partial^\circ(r(x)) < n$. 由哈密顿－凯莱(Hamilton－Cayley)定理知 $f_A(A) = 0$,故有 $g(A) = r(A)$.

同样,我们还可用 A 的最小多项式做除式,做带余除法,得到次数还可能低的多项式 $r(x)$,使 $g(A) = r(A)$.

3. 二项式展开法

若矩阵 A 的主对角线上的元素相同,则将 A 表示为一个数量阵 kI 与另一矩阵 B 之和,即 $A = kI + B$,且矩阵 B 的高次幂易于计算,则

$$A^n = (kI + B)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (kI)^i B^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i k^i B^{n-i}.$$

4. 递推法

一般地,先求出 $A^2, A^3, \cdots$,在此基础上,得出递推公式,进而求出 A^n 的一般表达式;并用数学归纳法证明一般表达式的正确性.

例 19　已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,求 A^{201}.

解法 1　利用相似对角化可求得

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, 使 P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

于是　$$A^{201} = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{201} P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2^{201}&0\\0&0&2^{201}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{200}&0&2^{200}\\0&2^{201}&0\\2^{200}&0&2^{200}\end{pmatrix}.$$

解法 2　矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$f_A(x)=|x\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}x-1&0&-1\\0&x-2&0\\-1&0&x-1\end{vmatrix}=x(x-2)^2,$$

最小多项式为 $x(x-2)$，设

$$x^{201}=x(x-2)q(x)+(ax+b),$$

分别令 $x=0,x=2$ 可求得 $b=0,a=2^{200}$. 于是

$$\boldsymbol{A}^{201}=2^{200}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2^{200}&0&2^{200}\\0&2^{201}&0\\2^{200}&0&2^{200}\end{pmatrix}.$$

解法 3　可求得 $\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}=2\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{A}^2=2^2\boldsymbol{A}$. 设 $\boldsymbol{A}^k=2^{k-1}\boldsymbol{A}$，则

$$\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}=2^{k-1}\boldsymbol{A}^2=2^{k-1}(2\boldsymbol{A})=2^k\boldsymbol{A}.$$

故

$$\boldsymbol{A}^{201}=2^{200}\boldsymbol{A}=2^{200}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{200}&0&2^{200}\\0&2^{201}&0\\2^{200}&0&2^{200}\end{pmatrix}.$$

解法 4　$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}$，其中

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}(1,0,1),\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$ 且有 $\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{CB}=\boldsymbol{0}$. 于是

$$\boldsymbol{A}^{201}=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})^{201}=\boldsymbol{B}^{201}+\boldsymbol{C}^{201}=2^{200}\boldsymbol{B}+\begin{pmatrix}0&0&0\\0&2^{201}&0\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^{200}&0&2^{200}\\0&2^{201}&0\\2^{200}&0&2^{200}\end{pmatrix}.$$

4.4　练习题及答案

4.4.1　练习题

1. 设A为三阶方阵，且$|A|=\frac{1}{2}$，则$|(2A)^{-1}+A^*|=$(　　).

(A)$\frac{1}{2}$;　　(B)2;　　(C)5;　　(D)$\frac{125}{4}$

2. 已知A为n阶方阵，且满足关系式$(A-E)^2=3(A+E)^2$，则$(A+E)^{-1}=$(　　).

(A)$A^{-1}+E$;　(B)$\frac{1}{2}A+E$;　(C)$-\frac{1}{2}A-E$;　(D)$A+4E$.

3. 设A为四阶方阵，$(A+E)^{-1}$存在，且$B=(A+E)^{-1}(E-A)$，则$(B+E)^{-1}=$(　　).

(A)$2(A+E)$;　　(B)$A+E$;

(C)$\frac{1}{2}(A+E)$;　　(D)不存在.

4. 设三阶方阵$A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}$，且$|A|=-4$，则$\left|\begin{pmatrix}\alpha_3-3\alpha_1\\ 2\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix}\right|=$(　　).

5. 设四阶方阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$B=(\beta,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，且$|A|=-3$，$|B|=1$，则$|A+B|=$(　　).

6. 设A和B都是n阶矩阵，且$|A|=2$，$|B|=-3$，则

$$|A^{-1}B^*-A^*B^{-1}|=(\quad).$$

7. 已知A,B,C都是行列式为2的三阶方阵，则$C=\begin{vmatrix}0 & -A\\ \left(\frac{2}{3}B\right)^{-1} & C\end{vmatrix}=$(　　).

8. 设A和B都是n阶矩阵，A^*，B^*分别为A，B的伴随矩阵. 则分

块矩阵 $C=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 $C^*=($　　$)$.

9. 设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix}$,

$P_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, 其中 A 可逆, 则 $B^{-1}=($　　$)$.

10. 设 A 是 n 阶方阵, 且 $AA'=I$, $|A|<0$, 则 $|A+I|=($　　$)$.

11. 设 A 是秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵, 证明: 存在 n 阶可逆矩阵 Q, $m\times r$ 列满秩阵 P_1, 使 $AQ=(P_1,0)$, 其中 0 是 $m\times(n-r)$ 零矩阵.

12. 试证: $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r 的充要条件是 $A=\alpha_1\beta'_1+\alpha_2\beta'_2+\cdots+\alpha_r\beta'_r$, 其中 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,r)$ 为线性无关的 m 维列向量, $\beta_i(i=1,2,\cdots,r)$ 为线性无关的 n 维列向量.

13. 证明一个 n 阶矩阵 A 的秩 $\leqslant 1$ 的充要条件是 A 可表为一个 $n\times 1$ 矩阵与一个 $1\times n$ 矩阵的乘积. 特别地, 当 $R(A)=1$ 时, $A^2=tr(A)A$.

14. 证明: 任意一个 n 阶矩阵 A 都可表为一个可逆矩阵与一个幂等矩阵之积.

15. 设 A 为 n 阶方阵, 且满足 $A^3=3A(A-E)$, 试证 $A-E$ 为可逆阵, 并求 $(A-E)^{-1}$.

16. 设 A 为 n 阶方阵, 若 $AX=A-X$, 则 $A+E$ 为可逆阵, 并求 $(A+E)^{-1}$ 和 X.

17. 设 n 阶矩阵 A 和 B 满足 $A+B=AB$, 求证: I_n-A 是可逆矩阵, 且 $AB=BA$.

18. 设 A, B 都是 n 阶可逆矩阵, 证明:

(1) $A+B$ 是可逆矩阵当且仅当 $A^{-1}+B^{-1}$ 是可逆矩阵, 并求它们的逆;

(2)试找出 $A-B$ 可逆的充要条件,并给予证明.

19. 已知方阵 A 满足 $A^2-A-2I=0$,证明: A 和 $A+2I$ 皆为可逆阵,并求出它们的逆.

20. 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$,且矩阵 X 满足 $AXA+BXB=AXB+BXA+I$,求 X.

21. 已知 A 和 B 都是三阶矩阵,且满足 $2A^{-1}B=B-4I$.

(1)证明:矩阵 $A-2I$ 可逆;

(2)若 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$,求矩阵 A.

22. 若 $A^2=B^2=I$ 且 $|A|+|B|=0$,则 $A+B$ 必为奇异阵.

23. 已知二阶矩阵 A,满足 $A^5=0$,证明 $(I-A)^{-1}=I+A$.

24. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,求 A^{100}.

25. 设 $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$,求 $2A^8-3A^5+A^4+A^2-4I$.

26. 求出下列矩阵的若当标准形和最小多项式:

(1) $A=\begin{pmatrix}3&0&8\\3&-1&6\\-2&0&-5\end{pmatrix}$;　(2) $B=\begin{pmatrix}4&5&-2\\-2&-2&1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$.

4.4.2 练习题答案

1. (B)　2. (C)　3. (C)　4. 8　5. -16

6. $(-1)^{n-1}\dfrac{5^n}{6}$. 因为 $|A^{-1}B^*-A^*B^{-1}|=||B|A^{-1}B^{-1}-|A|A^{-1}B^{-1}|$ $=(-5)^n(-\dfrac{1}{6})$.

7. $\frac{27}{8}$. 原式 $=(-1)^{1+2+3+4+5+6}|-A|\left|\left(\frac{2}{3}B\right)^{-1}\right|=-(-1)^3|A|\cdot\left|\frac{3}{2}B^{-1}\right|=\frac{27}{8}$.

8. $\begin{pmatrix}|B|A^* & 0\\ 0 & |A|B^*\end{pmatrix}$.

9. $P_1P_2A^{-1}$ 或 $P_2P_1A^{-1}$.

10. 0. 由已知得 A 是正交阵，且 $|A|=-1$，又因为

$$|A+I|=|A+AA'|=|A||A'+I|=|A||A+I|=-|A+I|,$$

故 $|A+I|=0$.

11. 仿照例 4 证明.

12. 证明：必要性. 由例 1 知，存在 m 阶可逆矩阵 P，n 阶可逆矩阵 Q，使得

$$A=P^{-1}\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q^{-1}=P^{-1}E_{11}Q^{-1}+P^{-1}E_{22}Q^{-1}+\cdots+P^{-1}E_{rr}Q^{-1},$$

即 $A=(P^{-1}\varepsilon_1)(\varepsilon'_1Q^{-1})+(P^{-1}\varepsilon_2)(\varepsilon'_2Q^{-1})+\cdots+(P^{-1}\varepsilon_r)(\varepsilon_r'Q^{-1})$，其中 $\varepsilon_i(i=1,2,\cdots,r)$ 是 m 维标准列向量，$\varepsilon'_i(i=1,2,\cdots,r)$ 是 n 维标准行向量.

设 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,r)$ 是 P^{-1} 的前 r 个列向量，$\beta'_i(i=1,2,\cdots,r)$ 是 Q^{-1} 的前 r 个行向量，显然 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,r)$ 为线性无关的 m 维列向量，$\beta_i(i=1,2,\cdots,r)$ 为线性无关的 n 维列向量，且 $A=\alpha_1\beta'_1+\alpha_2\beta'_2+\cdots+\alpha_r\beta'_r$.

充分性. 若 $A=\alpha_1\beta'_1+\alpha_2\beta'_2+\cdots+\alpha_r\beta'_r$，其中 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,r)$ 为线性无关的 m 维列向量，$\beta_i(i=1,2,\cdots,r)$ 为线性无关的 n 维列向量. 则

$$A=\begin{pmatrix}p_{11}\\ \vdots\\ p_{m1}\end{pmatrix}(q_{11},\cdots,q_{1n})+\begin{pmatrix}p_{12}\\ \vdots\\ p_{m2}\end{pmatrix}(q_{21},\cdots,q_{2n})+\cdots+\begin{pmatrix}p_{1r}\\ \vdots\\ p_{mr}\end{pmatrix}(q_{r1},\cdots,q_{rn}),$$

$$A=(P\varepsilon_1)(\varepsilon'_1Q)+(P\varepsilon_2)(\varepsilon'_2Q)+\cdots+(P\varepsilon_r)(\varepsilon'_rQ)$$

其中 $P=\begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{m1} & \cdots & p_{mm} \end{pmatrix}$,$Q=\begin{pmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}$,且它们都可逆,于是

$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q$,即矩阵 A 的秩为 r.

13. 证明:必要性. 当 $R(A)=0$ 时结论显然成立;当 $R(A)=1$ 时,由矩阵的满秩分解定理即得证. 设 $A=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1,\cdots,b_n)$,则

$$A^2=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1,\cdots,b_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1,\cdots,b_n)=\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)A=tr(A)A.$$

充分性. 若 $A=\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1,\cdots,b_n)$,则 $R(A)\leqslant R(b_1,\cdots,b_n)\leqslant 1$.

14. 证明:若 $A=0$,显然.

若 $R(A)=r$,则存在 n 阶可逆矩阵 P,Q 使 $PAQ=\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,即 $A=$

$$P^{-1}\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}=P^{-1}Q^{-1}Q\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$$

令 $B=P^{-1}Q^{-1}$,$C=Q\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}$,则 $A=BC$,且显然 B是可逆矩阵,又 $C^2=Q\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}Q\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q^{-1}=C$,即 C是幂等矩阵.

15. $(A-E)^{-1}=-(A-E)^2$.

16. 证明:由 $AX=A-X$ 得 $AX-A+X=0$,两端同减去 E 整理得 $(A+E)(X-E)=-E$,故 $A+E$可逆,且 $(A+E)^{-1}=E-X$,$X=E-(A+E)^{-1}$.

17. 证明：因为 $(I_n-A)(I_n-B)=I_n-A-B+AB=I_n$，所以 I_n-A 是可逆矩阵. 又因为 $(I_n-A)^{-1}=I_n-B$，故 $(I_n-A)(I_n-B)=(I_n-B)(I_n-A)$，展开消去同类项后即得 $AB=BA$.

18. 证明：(1) 必要性. 若 $A,B,A+B$ 都是 n 阶可逆矩阵，由于

$$A^{-1}+B^{-1}=A^{-1}(BB^{-1})+(A^{-1}A)B^{-1}=A^{-1}(A+B)B^{-1},$$

故 $A^{-1}+B^{-1}$ 也是可逆矩阵，且 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}=B(A+B)^{-1}A$.

充分性. 由于 $A,B,A^{-1}+B^{-1}$ 都是 n 阶可逆矩阵，即 $A^{-1},B^{-1},A^{-1}+B^{-1}$ 都是 n 阶可逆矩阵，由必要性可得 $(A^{-1})^{-1}+(B^{-1})^{-1}=A+B$ 也是可逆矩阵，且 $(A+B)^{-1}=[(A^{-1})^{-1}+(B^{-1})^{-1}]^{-1}=B^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}$.

(2) $A-B$ 可逆的充要条件是 $B^{-1}-A^{-1}$ 是可逆矩阵. 证明与 (1) 类似.

19. 证明：由 $A^2-A-2I=0$ 得 $A(A-I)=2I$，故 A 为可逆阵，且

$$A^{-1}=\frac{1}{2}(A-I);$$

由 $A^2-A-2I=0$，设 $(A+2I)(A+aI)=bI$，即 $A^2+(a+2)A+(2a-b)I=0$，从而 $\begin{cases}a+2=-1\\2a-b=-2\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-3\\b=-4\end{cases}$，即 $(A+2I)(A-3I)=-4I$，故 $A+2I$ 为可逆阵，且 $(A+2I)^{-1}=\frac{1}{4}(3I-A)$.

或由 $A^2-A-2I=0$ 得 $A+2I=A^2$，由于 A 为可逆阵，故 $A+2I$ 也为可逆阵，且 $(A+2I)^{-1}=(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2=\frac{1}{4}(A-I)^2=\frac{1}{4}(3I-A)$.

20. 解：由 $AXA+BXB=AXB+BXA+I$ 得

$(AXA-BXA)+(BXB-AXB)=I$，即 $(A-B)XA+(B-A)XB=I$，或 $(A-B)X(A-B)=I$，于是

$$X=[(A-B)^{-1}]^2=\left(\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}^{-1}\right)^2=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

21. 证及解：(1) 等式 $2A^{-1}B=B-4I$ 左乘 A，得 $2B=AB-4A$，从而得 $(A-2I)(B-4I)=8I$，因此矩阵 $A-2I$ 可逆.

(2)由 $2B=AB-4A$ 得 $2B=A(B-4I)$,故

$$A=2B(B-4I)^{-1}$$

$$=2B\begin{pmatrix}-3&-2&0\\1&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}^{-1}=-\frac{1}{16}\cdot 2\begin{pmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-4&0\\2&6&0\\0&0&8\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0&2&0\\-1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.$$

22. 证明:行列式法. 由已知条件得

$$|A||A+B|=|A^2+AB|=|B^2+AB|=|B||A+B|=-|A||A+B|,$$

于是 $|A+B|=0$,故 $A+B$ 必为奇异阵.

23. 证明:由于 $(I-A)(I+A)=I-A^2=I$,故往证 $A^2=0$.

因为 $A^5=0$,故二阶矩阵 A 不可逆,即 $R(A)\leqslant 1$.

若 $A=0$,结论显然成立.

若 $R(A)=1$,则 $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}(b_1,b_2)$,其中 a_1,a_2 不全为零,b_1,b_2 不全为零. 从而 $A^2=kA$,于是 $A^5=k^4A=0$,由于 $A\neq 0$,故 $k=0$,因此 $(I-A)^{-1}=I+A$.

24. $$A^{100}=\begin{pmatrix}1&0&0\\50&1&0\\50&0&1\end{pmatrix}.$$

25. 解:$f_A(x)=x^3-2x+1$,故 $A^3-2A+I=0$

$$2A^8-3A^5+A^4+A^2-4I$$

$$=(A^3-2A+I)(2A^5+4A^3-5A^2+9A-14I)+(24A^2-37A+10I)$$

$$=24A^2-37A+10I$$

$$=\begin{pmatrix}-3&48&-26\\0&95&-61\\0&-61&34\end{pmatrix}.$$

26. 解:(1)因为 $\lambda I-A\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\lambda+1&0\\0&0&(\lambda+1)^2\end{pmatrix}$,故 A的初等因子是 $\lambda+1,(\lambda+1)^2$,于是 A 的若当标准形为$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$,其最小多项式为$(\lambda+1)^2$.

(2)因为 $\lambda I-B\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-1)^3\end{pmatrix}$,故 B 的初等因子是 $(\lambda-1)^3$,于是 B 的若当标准形为$\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$,其最小多项式为 $(\lambda-1)^3$.

第5章　向量空间

向量空间的理论是高等代数的中心内容,它在自然科学和工程技术的许多领域中有着较为广泛的应用,向量空间是采用公理化方法定义的,它具有高度抽象的特点.在向量空间的讨论中必将加深对线性方程组理论和矩阵代数的理解和掌握.

5.1　内容提要

5.1.1　向量空间

1. 向量空间的定义

令 F 是一个数域. F 中的元素用小写拉丁字母 $a,b,c,\cdots$ 来表示. 令 V 是一个非空集合. V 中元素用小写希腊字母 $\alpha,\beta,\gamma,\cdots$ 来表示. 我们把 V 中的元素叫做向量而把 F 中的元素叫做纯量. 如果下列条件被满足,就称 V 是 F 上一个**向量空间**:

(1) 在 V 中定义了一个加法. 对于 V 中任意两个向量 α,β, V 中一个惟一确定的向量与它们对应,这个向量叫做 α 与 β 的和,并且记作 $\alpha+\beta$.

(2) 有一个"纯量乘法". 对于 F 中每一个数 a 和 V 中每一个向量 α,有 V 中惟一确定的向量与它们对应,这个向量叫做 a 与 α 的积,并且记作 $a\alpha$.

(3) 向量的加法和纯量乘法满足下列算律:

① $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;　　② $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

③在 V 中存在一个零向量,记作0,它具有以下性质:对于 V 中每一个向量 α,都有 $0+\alpha=\alpha$;

④对于 V 中每一向量 α,在 V 中存在一个向量 α',使得 $\alpha'+\alpha=0$. 这样的 α' 叫做 α 的负向量;

⑤ $a(\alpha+\beta)=a\alpha+a\beta$;　　⑥ $(a+b)\alpha=a\alpha+b\alpha$;

⑦ $(ab)\alpha=a(b\alpha)$;　　⑧ $1\alpha=\alpha$,

这里 α,β,γ 是 V 中任意向量,而 a,b 是 F 中任意数.

2. 向量空间的例子

(1)平面(空间)中的全体向量组成的集合 $V_2(V_3)$ 是实数域 R 上的向量空间;

(2) F^n 是数域 F 上的向量空间;

(3) $F[x]$ 对于多项式的加法与数和多项式的乘法作成数域 F 上的一个向量空间. 数域 F 上的所有次数小于 n 的多项式及零多项式作成的集合记作 $F[x]_n$,对多项式的加法与数和多项式的乘法,也作成 F 上的一个向量空间;

(4) $M_{mn}(F)$ 对于矩阵的加法与数和矩阵的乘法,作成数域 F 上的一个向量空间,当 $m = n$ 时,记为 $M_n[F]$;

(5)复数域 C 是实数域 R 上的向量空间;

(6)数域 F 是其自身上的向量空间;

(7)全体实函数作成的集合 V,对于函数的加法与数和函数的乘法,作成 R 上的向量空间;

(8)全体收敛于 0 的实数无穷数列作成的集合 V,对于数列的加法 $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$ 与数和数列的数量乘法 $k\{a_n\} = \{ka_n\}$,作成 R 上的向量空间.

3. 简单性质

由向量空间的定义,推出下列简单性质:

(1)零向量惟一;

(2)任意一向量 α 的负向量惟一,记作 $-\alpha$;

(3) $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s = (\alpha_1 + \cdots + \alpha_t) + (\alpha_{t+1} + \cdots + \alpha_s)$;

(4) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ 可由其它条件推出;

(5)条件(3)与(4)可改为:方程 $\alpha + x = \beta$ 对于 V 中的任意向量 α,β 有解;

(6) $0\alpha = 0, k0 = 0, (-1)\alpha = -\alpha, -(-\alpha) = \alpha, (-k)\alpha = k(-\alpha) = -k\alpha$;

(7)定义减法: $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta), k(\alpha - \beta) = k\alpha - k\beta, \alpha + \beta = \gamma \Leftrightarrow \alpha = \gamma - \beta$. 对于 V 中的任意向量 α,β,方程 $\alpha + x = \beta$ 在 V 中有且仅有一解 $x = \beta - \alpha$;

(8) $\alpha+\beta=\alpha+\gamma \Leftrightarrow \beta=\gamma$;

(9) $k\alpha=0 \Leftrightarrow k=0$ 或 $\alpha=0$;

(10) $(k_1+k_2+\cdots+k_s)\alpha=k_1\alpha+k_2\alpha+\cdots+k_s\alpha$,

$k(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s)=k\alpha_1+k\alpha_2+\cdots+k\alpha_s$;

(11)对于任意正整数 m,有 $m\alpha=\alpha+\cdots+\alpha$,共 m 个 α ;

(12) $\alpha\neq 0,\alpha\in V,a,b\in F$,则 $a\neq b \Leftrightarrow a\alpha\neq b\alpha$,从而,若 V 中有非零向量,则 V 有无限多个向量.

5.1.2　基、维数、坐标

1. 基

设 V 是数域 F 上一个向量空间. V 中满足下列两个条件的向量组 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 叫做 V 的一个基.

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关;

(2) V 的每一个向量都可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性表示.

$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 为 $V_n(F)$ 一个基 $\Leftrightarrow V$ 中每一向量 α 都可惟一地表成这 n 个向量的线性组合.

设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ 为 $V_n(F)$ 一组线性无关的向量,则 V 中必有 $n-r$ 个向量 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$,使得 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n\}$ 作成 V 的一个基(此结论有时称为基的扩充定理).

2. 维数

一个向量空间 V 的基所含向量的个数叫做 V 的维数.

由定义得出:(1) $\dim F^n=n$;　(2) $F[x]$ 是无限维的;　(3)若 $\dim V=0$, 则 $V=\{0\}$;　(4)任意一向量空间,不是有限维的,就是无限维的.

数域 F 上的向量空间 V 是 n 维的 $\Leftrightarrow V$ 中存在 n 个向量 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 作成 V 的一组基.

本书主要研究有限维的向量空间.

3. 坐标

设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 为 $V_n(F)$ 一个基, $\forall\alpha\in V_n(F)$,有 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$,则称这个有序数组 $k_1,\cdots,k_n$ 为 α 关于基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 的坐标,记为 $(k_1,\cdots,k_n)$,其中 k_i 称为 α 关于基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 的第 i 个坐标, $i=1,2,\cdots,n$.

4. 基变换与坐标变换

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 与 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 是 n 维向量空间 V 的两组基,若有

$$\begin{cases}\varepsilon'_1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{21}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n1}\varepsilon_n \\ \varepsilon'_2 = a_{12}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 + \cdots + a_{n2}\varepsilon_n \\ \cdots \\ \varepsilon'_n = a_{1n}\varepsilon_1 + a_{2n}\varepsilon_2 + \cdots + a_{nn}\varepsilon_n\end{cases} \quad 则称 A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

是基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 的过渡矩阵,即有 $(\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n) = (\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)A$.

若 A 是 n 维向量空间 V 中由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 的过渡矩阵,则 A 是可逆矩阵. 反之,任意一个 n 阶可逆矩阵 A 都可以作为 n 维向量空间 V 中由一组基到另一组基的过渡矩阵.

关于基的过渡矩阵,还有下列性质:

(1)若基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 的过渡矩阵是 A,则 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 到 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的过渡矩阵是 A^{-1} .

(2)若基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 的过渡矩阵是 A,基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 到基 $\varepsilon''_1,\varepsilon''_2,\cdots,\varepsilon''_n$ 的过渡矩阵是 B,则 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到 $\varepsilon''_1,\varepsilon''_2,\cdots,\varepsilon''_n$ 的过渡矩阵是 AB .

(3)若基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 的过渡矩阵是 A,基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon''_1,\varepsilon''_2,\cdots,\varepsilon''_n$ 的过渡矩阵是 B,则 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 到 $\varepsilon''_1,\varepsilon''_2,\cdots,\varepsilon''_n$ 的过渡矩阵是 $A^{-1}B$.

设向量 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标是 $X' = (x_1,x_2,\cdots,x_n)$,而 α 在基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 下的坐标是 $Y' = (y_1,\cdots,y_n)$,并且,基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 到基 $\varepsilon'_1,\varepsilon'_2,\cdots,\varepsilon'_n$ 的过渡矩阵是 A,则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix},$$

或

$$X = AY, Y = A^{-1}X.$$

5.1.3　子空间及其交、和、直和

1. 子空间

令 W 是数域 F 上向量空间 V 的一个非空子集. 如果 W 对于 V 的加法以及纯量乘法来说是封闭的,那么就称 W 是 V 的一个**子空间**.

数域 F 上的向量空间 V 的非空子集合 W 作成 V 的子空间

$\Leftrightarrow 1)\alpha+\beta\in W,\forall\alpha,\beta\in W;2)k\alpha\in W,\forall k\in F,\forall\alpha\in W.$

$\Leftrightarrow k_1\alpha+k_2\beta\in W,\forall k_1,k_2\in F,\forall\alpha,\beta\in W.$

任意向量空间 V 都有子空间:零空间$\{0\}$与自身 V,称为**平凡子空间**,而其它的子空间(若还有的话)称为**非平凡子空间**.

向量空间 V 的子空间 W 有如下性质:

(1)子空间 W 的零向量 0_W 与整个空间 V 的零向量 0_V 一致,即 $0_W=0_V=0$;

(2)子空间 W 的任意一向量 α 在 W 中的负向量 $-\alpha_W$ 与在整个空间 V 中的负向量 $-\alpha_V$ 一致,即 $-\alpha_W=-\alpha_V=-\alpha$;

(3)子空间的维数不超过整个空间的维数(认为有限维小于无限维).

设 V 是数域 F 上的 n 维向量空间,W 是 V 的 m 维子空间,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 W 的一组基,则这组向量必定可以扩充为整个空间的基. 即,在 V 中必定可以找到 $n-m$ 个向量 $\alpha_{m+1},\alpha_{m+2},\cdots,\alpha_n$,使得 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基.

2. 线性包与生成向量组

设 V 是数域 F 上的向量空间,任取 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in V$. 作

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=\{\sum_{i=1}^{s}k_i\alpha_i\mid k_i\in F\},$$

则 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 是 V 的子空间.

称 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 是由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 所生成(张成)的**子空间**,或称为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的**线性包**,称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 的**生成向量组**,每个 α_i 称为**生成元**.

线性包有如下性质:

(1) $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 是 V 的子空间;

(2) $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\supseteq\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}$;

(3)若 W 是 V 的子空间,且 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}\subseteq W$,则 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\subseteq W$;

(4) $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)=L(\beta_1,\cdots,\beta_t)\Leftrightarrow\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_t$ 等价;

(5) $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$ 的维数等于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s$ 的秩.

矩阵的行(列)向量生成的子空间称为它的行(列)空间.

3. 子空间的交与和

若 W_1,W_2 是向量空间 V 的子空间,则 $W_1\cap W_2=\{\alpha\mid\alpha\in W_1,\alpha\in W_2\}$ 是 V 的子空间,$W_1\cap W_2$ 称为 W_1 与 W_2 的交.

子空间的交具有性质:

(1) $W_1\cap W_2\subseteq W_1,W_1\cap W_2\subseteq W_2$;

(2) $W_1\cap W_2=W_2\cap W_1$;

(3) $(W_1\cap W_2)\cap W_3=W_1\cap(W_2\cap W_3)$;

(4) $\bigcap\limits_{i=1}^{s}W_i=W_1\cap W_2\cap\cdots\cap W_s=(\bigcap\limits_{i=1}^{t}W_i)\cap(\bigcap\limits_{j=t+1}^{s}W_j)$.

若 W_1,W_2 是向量空间 V 的子空间,则 $W_1+W_2=\{\alpha_1+\alpha_2\mid\alpha_1\in W_1,\alpha_2\in W_2\}$ 是 V 的子空间,W_1+W_2 称为 W_1 与 W_2 的和.

子空间的和具有性质:

(1) $W_1\subseteq W_1+W_2,W_2\subseteq W_1+W_2$;　　(2) $W_1+W_2=W_2+W_1$;

(3) $(W_1+W_2)+W_3=W_1+(W_2+W_3)$;

(4) $\sum\limits_{i=1}^{s}W_i=W_1+W_2+\cdots+W_s=(\sum\limits_{i=1}^{t}W_i)+(\sum\limits_{j=t+1}^{s}W_j)$;

(5) $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\cdots,\beta_t)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)$.

对于有限维向量空间的子空间,有下列的维数公式:

$$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$$

4. 直和与余子空间

设 W_1,W_2 是向量空间 V 的子空间,若和 $W=W_1+W_2$ 中每个向量 α 的分解式 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1\in W_1,\alpha_2\in W_2$ 是惟一的,则称该和为直和,记作 $W=W_1\oplus W_2$.

设 W_1, W_2 是向量空间 V 的子空间，$W = W_1 + W_2$，则下列诸条件等价：

(1) $W = W_1 \oplus W_2$；　　(2) 零向量的分解式惟一；

(3) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$；　　(4) $\dim W = \dim W_1 + \dim W_2$；

(5) W_1 的一基与 W_2 的一基合起来即为 W 的一基.

设 V 是数域 F 上的向量空间，W 是 V 的子空间. 若有 V 的子空间 U，使得 $V = W \oplus U$，则称 U 是 W 的**余子空间**.

n 维向量空间 V 的任意一子空间均有余子空间.

设 $W_1, W_2, \cdots, W_s$ 是向量空间 V 的子空间. 若和 $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_s$ 中每个向量 α 的分解式 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s, \alpha_i \in W_i (i = 1, 2, \cdots, s)$ 是惟一的，则称该和为直和，记作 $W = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$.

若有子空间的和式 $W = W_1 + W_2 + \cdots + W_s$　　(a)

$$\left.\begin{aligned} W_1 &= W_{11} + W_{12} + \cdots + W_{1m_1} \\ W_2 &= W_{21} + W_{22} + \cdots + W_{2m_2} \\ &\cdots \\ W_s &= W_{s1} + W_{s2} + \cdots + W_{sm_s} \end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

则有子空间的和式

$$W = W_{11} + \cdots + W_{1m_1} + W_{21} + \cdots + W_{2m_2} + \cdots + W_{s1} + \cdots + W_{sm_s} . \quad \text{(c)}$$

并且，(c) 为直和 $\Leftrightarrow$ (b) 与 (a) 均为直和.

5.1.4　同构

1. 同构的定义

设 V 与 V' 是数域 F 上的两个向量空间. 若有 V 到 V' 的双射 σ，满足：

(1) $\sigma(\alpha + \beta) = \sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$；(2) $\sigma(k\alpha) = k\sigma(\alpha)$，其中 α, β 是 V 中任意向量，k 是 F 中任意数，则称 σ 是 V 到 V' 的**同构映射**，称 V 与 V' **同构**，记作 $V \overset{\sigma}{\cong} V'$ 或 $V \cong V'$.

2. 由定义推出下列性质：

(1) $\sigma(0) = 0', \sigma(-\alpha) = -\sigma(\alpha)$；

(2) $\sigma(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s)=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_s\sigma(\alpha_s)$;

(3) $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0\Leftrightarrow k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_s\sigma(\alpha_s)=0'$;

(4) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关 $\Leftrightarrow\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_s)$ 线性无关;

(5)同构映射的乘积是同构映射,同构映射是可逆映射且其逆映射也是同构映射;

(6)向量空间的同构具有反身性、对称性、传递性;

(7)若 $V\overset{\sigma}{\cong}V'$,$W$ 是 V 的子空间,$\sigma(W)=\{\sigma(\alpha)\mid\alpha\in W\}$,则 $W\overset{\sigma}{\cong}\sigma(W)$.

3. 同构定理

设 V 是数域 F 上的 n 维向量空间,取定 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,作 $\sigma:V\to F^n$,$\sigma(\alpha)=[\alpha]$,$\forall\alpha\in V$,其中 α 在该基下的坐标为 $[\alpha]$,即,α 与 α 在 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标对应,则 σ 是双射,且保持线性运算,从而 $V\overset{\sigma}{\cong}F^n$.

定理　两个有限维向量空间 V 与 V' 同构 $\Leftrightarrow\dim V=\dim V'$.

5.2　重点和难点

本章的重点是:向量空间的定义,基与基变换,子空间的和与直和.

向量空间的定义由公理的形式给出,它是本章讨论问题的基础与出发点. 向量空间的性质的推导,其它一些概念的建立,都直接或间接地依赖于向量空间的定义. 因此,向量空间的定义成为本章的一个重点.

在有限维向量空间的理论中,基占有中心地位. 若有限维向量空间 V 不是零空间,则 V 含有无限多个向量,取定 V 的一组基后,V 中任意一向量都可以由这有限个基向量线性表出,从而实现了从无限到有限的转化. 维数就是一组基中所含向量的个数. 向量的坐标是对某一组确定的基而言的. 数域 F 上的 n 维向量空间 V 到 F^n 的同构映射是在取定基的情况下建立的. 基也是向量子空间的一个研究内容. 总之,基作为一个重要概念,既贯穿于向量空间理论的始终,又是处理问题的一个基本

工具. 同时,基的概念既是向量组极大无关组概念的深化,又是以后几章中建立线性变换与矩阵的一一对应的桥梁. 另外,基变换是一种重要的方法,过渡矩阵从量的方面刻划了基变换,基变换引起坐标变换,以后几章中常常用到基变换. 因此,基与基变换成为本章的一个重点.

子空间的和,是本章的一个重要内容,占有较多的篇幅,其中直和概念更为重要. 将向量空间分解为其子空间的直和,是一种重要的研究方法,在以后的讨论中还要多次用到. 另外,和与直和的思考方法,是代数学中的重要方法,其实质就是由局部来研究整体,在代数学的其它分支中也经常用到. 因此,子空间的和与直和成为本章的一个重点.

本章的难点是:向量空间的同构,维数公式,子空间的直和.

同构映射的定义中首先用到了映射的概念,而映射概念本身是较难理解的;其次,不但要求映射是双射,而且还要求保持线性运算,这样将映射与运算联系起来,是较为复杂的. 另外,具体建立两个给定向量空间之间的一个同构映射是较为困难的工作,尤其对于无限维向量空间更是如此,没有一般的方法,而仅仅依赖于灵活性与技巧性. 因此,向量空间的同构成为本章的一个难点. 解决困难的方法是:(1)分析同构映射的定义,熟悉其各条要求;(2)通过证明数域 F 上的 n 维向量空间 V 与 F^n 同构,紧扣同构映射的各条要求,进一步加深理解;(3)研究一些具体例子,总结证明同构的方法与技巧.

维数公式,尤其是推广了的维数公式,不容易证明,更不容易得到,并且,证明的过程也较长. 因此,维数公式成为本章的一个难点. 解决困难的方法是:(1)反复推敲证明过程,真正弄懂归纳出主要思路;(2)找两个具体的子空间,算出维数,验证维数公式,从而,增加感性认识,并有助于牢记公式;(3)分析维数公式的推广过程,并结合两个子空间的情况去思考,两个子空间时的关键是从它们交的基出发.

子空间的直和,是在和的基础上附加条件得出的,不容易理解,而且,相互等价的条件很多,比较复杂,因此子空间的直和成为本章的一个难点. 解决困难的方法是:(1)从交为 $\{0\}$ 的条件出发,体会子空间之间的关系,理解直和的含义;(2)通过研究熟悉的例子来加深理解;(3)通过研究各种等价条件,返回来进一步理解直和的定义.

5.3　例题解析

5.3.1　向量空间

判定所给的集合对于所给的法则是否作成向量空间，要从定义出发得出结论，并且，当作成向量空间时要逐条验证，当不作成向量空间时举反例说明某一条不成立.

例 1　按照矩阵的加法及数与矩阵的乘法，下列集合是否构成 F 上的向量空间：

(1) F 上所有 $m\times n$ 矩阵的集合 V_1；

(2) F 上所有 n 阶可逆矩阵的集合 V_2.

解　(1) V_1 作成 F 上的向量空间.

首先，$0=(0)_{mn}\in V_1$，V_1 非空.

其次，对于任意 $A=(a_{ij})_{mn}$，$B=(b_{ij})_{mn}\in V_1$，$k\in F$，

$$A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{mn}\in V_1,kA=(ka_{ij})_{mn}\in V_1.$$

再次，对于任意 $A,B,C\in V_1$，$k,l\in F$，由矩阵的运算性质知，成立：

①$A+B=B+A$；②$(A+B)+C=A+(B+C)$；③存在$0=(0)_{mn}\in V_1$，$A+0=(a_{ij}+0)_{mn}=(a_{ij})_{mn}=A$；④对任意$A=(a_{ij})_{mn}\in V_1$，存在$-A=(-a_{ij})_{mn}\in V_1$，使得$A+(-A)=(a_{ij}+(-a_{ij}))_{mn}=(0)_{mn}=0$；⑤$k(A+B)=kA+kB$；⑥$(k+l)A=kA+lA$；⑦$k(lA)=(kl)A$；⑧$1A=A$.

(2) V_2 不作成 F 上的向量空间.

$A=I$，$B=-I\in V_2$，但 $A+B=0\notin V_2$.

例 2　设 V 是正实数的集合，规定：对于任意的 $\alpha,\beta\in V$，$\alpha\oplus\beta=\alpha\beta$；对于任意的 $\alpha\in V$，任意的 $k\in\mathrm{R}$，$k\circ\alpha=\beta^k$，证明 V 是 R 上的向量空间.

证明　V 显然非空，并且，所规定的两个法规分别是 V 的加法与 R 和 V 的数量乘法.

又对于任意 $\alpha,\beta,\gamma\in V$，任意 $k,l\in\mathrm{R}$，有

(1) $\alpha \oplus \beta = \alpha\beta = \beta\alpha = \beta \oplus \alpha$;

(2) $(\alpha \oplus \beta) \oplus \gamma = (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma) = \alpha \oplus (\beta \oplus \gamma)$;

(3) $1 \oplus \alpha = 1\alpha = \alpha$, 1 是 V 中的零向量;

(4) $\frac{1}{\alpha} \oplus \alpha = \frac{1}{\alpha} \cdot \alpha = 1$, $\frac{1}{\alpha} \in V$ 是 α 的负向量;

(5) $k \circ (\alpha \oplus \beta) = k \circ (\alpha\beta) = (\alpha\beta)^k = \alpha^k\beta^k = (k \circ \alpha) \oplus (k \circ \beta)$;

(6) $(k + l) \circ \alpha = \alpha^{k+l} = \alpha^k\alpha^l = (k \circ \alpha) \oplus (l \circ \alpha)$;

(7) $k \circ (l \circ \alpha) = k \circ (\alpha^l) = (\alpha^l)^k = \alpha^{lk} = \alpha^{kl} = (kl) \circ \alpha$;

(8) $1 \circ \alpha = \alpha^1 = \alpha$.

因此, V 作成 R 上的向量空间.

5.3.2　基与维数

1. 按照定义求向量空间的基和维数

根据基的定义,如果能求出所给向量空间的一组线性无关的向量组,且空间中每一向量均能由其线性表示,则这组线性无关的向量即为所给向量空间的一组基. 要找出这样一组线性无关的向量,首先找出向量空间 V 中一组向量,使得 V 中任意一向量均可由该向量组线性表示,然后再证明此向量组线性无关.

例 3　求下列各向量空间的维数与一组基:

实数域上由矩阵 A 的全体实系数多项式组成的空间,其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}, \omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

解　因为 $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, 所以 $\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$, $\omega^3 = 1$, 由此可得

$$A^n = \begin{cases} I & 当 n = 3k \\ A & 当 n = 3k + 1. \\ A^2 & 当 n = 3k + 2 \end{cases}$$

于是,每个关于 A 的多项式都可由 A^2, A, I 线性表示,又若 $k_1A^2 + k_2A + k_3I = 0$,即

$$k_1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\omega^2&0\\0&0&\omega\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\omega^2\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

得 $\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\k_1\omega^2+k_2\omega+k_3=0\\k_1\omega+k_2\omega^2+k_3=0\end{cases}$，因为 $\begin{vmatrix}1&1&1\\\omega^2&\omega&1\\\omega&\omega^2&1\end{vmatrix}\neq 0$，所以 $k_1=k_2=k_3=0$，这说明 A^2,A,I 线性无关，从而 A^2,A,I 是一组基，空间的维数是 3.

例 4　设 $V=\{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\mid \alpha_i\in C\}$ 为实数域上向量空间，求 V 的基和维数.

解　取 $\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)$；

$\eta_1=(\mathrm{i},0,\cdots,0),\eta_2=(0,\mathrm{i},0,\cdots,0),\cdots,\eta_n=(0,0,\cdots,\mathrm{i})$.

设 $\alpha=(a_1+b_1\mathrm{i},a_2+b_2\mathrm{i},\cdots,a_n+b_n\mathrm{i})$ 为 V 中任意一向量，则

$$\alpha=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2+\cdots+a_n\varepsilon_n+b_1\eta_1+b_2\eta_2+\cdots+b_n\eta_n.$$

又若有 $k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n+l_1\eta_1+l_2\eta_2+\cdots+l_n\eta_n=0$，其中 k_i，$l_i\in\mathrm{R}$，$(i=1,2,\cdots,n)$，则有 $(k_1+l_1\mathrm{i},k_2+l_2\mathrm{i},\cdots,k_n+l_n\mathrm{i})=0$，于是 $k_1+l_1\mathrm{i}=k_2+l_2\mathrm{i}=\cdots=k_n+l_n\mathrm{i}=0$，故 $k_1=k_2=\cdots=k_n=l_1=\cdots=l_n=0$，即 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n,\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 线性无关，从而为 V 的一组基，且维 $V=2n$.

例 5　在 $\mathrm{R}^{2\times2}$ 中，设 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$，令 $\mathcal{A}(M)=AM-MA$，则 $\mathcal{A}$ 是 $\mathrm{R}^{2\times2}$ 的一个线性变换，求 $\mathcal{A}$ 的核的维数和一组基.

解　设 $\begin{pmatrix}x&y\\u&v\end{pmatrix}\in\mathcal{A}^{-1}(0)$，则

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x&y\\u&v\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&y\\u&v\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&y\\u&v\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}x&y\\u&v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}.$$

所以有 $\begin{cases}u=0\\x+y-v=0\end{cases}$，令 $y=0,v=1$ 解得 $x=1,u=0$，所以 $A_1=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$，令 $y=1,v=0$ 解得 $x=-1,u=0$，所以 $A_2=\begin{pmatrix}-1&1\\0&0\end{pmatrix}$，故 $\mathcal{A}^{-1}(0)=L(A_1,A_2)$，维 $\mathcal{A}^{-1}(0)=2$，且 $\{A_1,A_2\}$ 为其一组基.

例6　设 V,W 是数域 F 上的两个向量空间，且 $\dim V = n > 0$，$\dim W = m > 0$. 作 $V \times W = \{(x,y) \mid x \in V, y \in W\}$，并且规定：$(x,y) = (x_1,y_1)$ 当且仅当

$$x = x_1, y = y_1,$$

$(x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$，$k \circ (x,y) = (kx,ky)$，$k \in F$.

证明：(1) $V \times W$ 对于 $\oplus,\circ$ 作成 F 上的向量空间.

(2) $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$.

证明　(1)根据向量空间的定义验证，从略.

(2)设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 分别是 V 与 W 的一组基，则 $(x_1,0),(x_2,0),\cdots,(x_n,0),(0,y_1),(0,y_2),\cdots,(0,y_m)$ 是 $V \times W$ 的一组基.

首先，设 $k_1,k_2,\cdots,k_n,l_1,l_2,\cdots,l_m \in F$，使 $\sum_{i=1}^{n} k_i(x_i,0) \oplus \sum_{j=1}^{m} l_j(0,y_j) = (0,0)$，则 $\left(\sum_{i=1}^{n} k_i x_i, \sum_{j=1}^{m} l_j y_j\right) = (0,0)$，$\sum_{i=1}^{m} k_i x_i = 0$，$\sum_{j=1}^{m} l_j y_j = 0$，从而 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$，$l_1 = l_2 = \cdots = l_m = 0$，所以这 $n+m$ 个向量线性无关.

其次，对于任意的 $(\alpha,\beta) \in V \times W$，由 $\alpha \in V, \beta \in W$ 得 $\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$，$\beta = \sum_{j=1}^{m} b_j y_j$，$a_i,b_j \in F$，$i = 1,2,\cdots,n$，$j = 1,2,\cdots,m$，从而 $(\alpha,\beta) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i, \sum_{j=1}^{m} b_j y_j\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x_i,0) \oplus \sum_{j=1}^{m} b_j(0,y_j)$.

因此，这 $n+m$ 个向量作成 $V \times W$ 的一组基，$\dim(V \times W) = n + m = \dim V + \dim W$.

2. 线性包(生成子空间)的基与维数的求法

由于线性包中生成元已知，这样它的一个极大无关组就是线性包的一组基，此向量组的秩就是其维数. 所以求线性包的基与维数，只需求其生成元的一个极大无关组.

例7　在向量空间 F^4 中，求由下列 $\alpha_i(i = 1,2,3,4)$ 生成的子空间

的基与维数.

$\alpha_1=(2,1,3,1),\alpha_2=(1,2,0,1),\alpha_3=(-1,1,-3,0),\alpha_4=(1,1,1,1)$.

解 以向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为列作矩阵 A,并对 A 进行初等变换.

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\1&2&1&1\\3&0&-3&1\\1&1&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\-3&0&3&-1\\3&0&-3&1\\-1&0&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&-1&1\\0&0&0&0\\3&0&-3&1\\-1&0&2&0\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix}-1&1&2&0\\0&0&0&0\\3&0&-3&1\\-1&0&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&3&1\\-1&0&2&0\end{pmatrix}=B.$$

显然,B 的秩是3且第1,2,4列线性无关,因而构成一个极大无关组,故在 A 中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 为极大无关组,且是 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 的一组基,其维数是3.

例8 设 V 为由 $1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}$ 生成的有理数域 Q 上的向量空间,求 V 的维数和一组基.

解 因为 V 中每一向量都可以由 $1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}$ 线性表示,若 $1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}$ 线性无关,则可作为 V 的基. 事实上,$1,\sqrt{2}$ 是线性无关的,因为由 $k_1+k_2\sqrt{2}=0$ 可知必有 $k_2=0$,否则 $\sqrt{2}=-\frac{k_1}{k_2}$,而 $\sqrt{2}$ 是无理数,此为矛盾. 故 $k_2=0$,因而 $k_1=0$. 若 $k_1+k_2\sqrt{2}+k_3\sqrt{3}=0,k_1,k_2,k_3\in Q$,可得 $k_1+k_2\sqrt{2}=-k_3\sqrt{3}$,两边平方后得 $(k_1^2+2k_2^2-3k_3^2)+2k_1k_2\sqrt{2}=0$. 因为 $1,\sqrt{2}$ 对 Q 线性无关,故 $k_1k_2=0,k_1^2+2k_2^2-3k_3^2=0$. 如果 $k_1\neq0$,则 $k_2=0$ 且 $k_1^2-3k_3^2=0$,这是不可能的,因为 $\sqrt{3}$ 是无理数. 同理可证 $k_2\neq0$ 也是不可能的,所以 $k_1=k_2=0$,于是 $k_3=0$,即 $1,\sqrt{2},\sqrt{3}$,在 Q 上线性无关,最后若 $k_1+k_2\sqrt{2}+k_3\sqrt{3}+k_4\sqrt{6}=0$ 可得 $k_1+k_2\sqrt{2}=-\sqrt{3}(k_3+k_4\sqrt{2})(k_1,k_2,k_3,k_4\in Q)$,如果 k_3 与 k_4 中有一个不为零,则可得 $\frac{k_1+k_2\sqrt{2}}{k_3+k_4\sqrt{2}}=-\sqrt{3}$. 经分母有理化可得:$l+m\sqrt{2}=-\sqrt{3}$,其中 l 与 m 是

有理数,这说明$1,\sqrt{2},\sqrt{3}$线性相关,二者为矛盾,故$k_3=0,k_4=0$. 从而$k_1=k_2=0$,于是,$1,\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{6}$在Q上线性无关,所以作成$V$的基,$V$的维数为4.

例9　求下列子空间W的一组基.

$$W=\left\{(x,y,z,u)\left|\begin{matrix}x+y+3z+3u=0,x+2z+u=0\\x+3y+5z+7u=0,y+z+2u=0\end{matrix}\right.\right\}$$

解　求出生成元的分量x,y,z,u所满足的上述方程组的一个基础解系就是W的一组基,用初等行变换求之,由

$$A=\begin{pmatrix}1&1&3&3\\0&1&1&2\\1&0&2&1\\1&3&5&7\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{经初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&2&1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=A_1,$$

由A_1得一个基础解系即为W的一组基:$\alpha_1=(-2,-1,1,0),\alpha_2=(-1,-2,0,1)$.

3. **利用维数公式求交、和的基与维数**

设$V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s),V_2=L(\beta_1,\cdots,\beta_t)$,求$V_1\cap V_2,V_1+V_2$的基和维数. 由于$V_1,V_2$已是生成子空间的,故可分别求出$V_1,V_2$的基,再求$V_1\cap V_2,V_1+V_2$的基,因为$V_1,V_2$的生成元合成一组就是$V_1+V_2$的生成元,所以关键求$V_1\cap V_2$的基和维数.

为方便计算,不妨设$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s\}$与$\{\beta_1,\cdots,\beta_t\}$分别是$V_1$与$V_2$的基,$V_1,V_2\in F^n$. 则$\gamma\in V_1\cap V_2\Leftrightarrow\exists k_1,\cdots,k_s,l_1,\cdots,l_t\in F$使得$\gamma=k_1\alpha_1+\cdots+k_s\alpha_s=l_1\beta_1+\cdots+l_t\beta_t\Leftrightarrow k_1,k_2,\cdots,k_s,l_1,\cdots,l_t$是向量方程$x_1\alpha_1+\cdots+x_s\alpha_s-y_1\beta_1-\cdots-y_t\beta_t=0$的解$\Leftrightarrow k_1,\cdots,k_s,l_1,\cdots l_t$是方程组

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,-\beta_1,\cdots,-\beta_t)\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_s\\y_1\\\vdots\\y_t\end{pmatrix}=0\text{ 的解.}$$

设$A=(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,-\beta_1,\cdots,-\beta_t)$,对$A$进行初等行变换得的列向

量组的一个极大无关组在 A 中相应的列向量是 V_1+V_2 的一个基. 维 $(V_1+V_2)=$ 秩 A.

而 $A=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_s\\ y_1\\ \vdots\\ y_t\end{pmatrix}=0$ 的一个基础解系中的解向量确定的一组向量是 $V_1\cap V_2$ 的一个基.

维 $(V_1\cap V_2)=$ 维 V_1+ 维 V_2- 维$(V_1+V_2)=s+t-$ 秩 A.

若给定的生成元组线性相关,则分别求出基,再按上法做.

例 10 设 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$, $V_2=L(\beta_1,\beta_2)$, 其中 $\alpha_1=(1,2,1,0)$, $\alpha_2=(-1,1,1,1)$, $\beta_1=(2,-1,0,1)$, $\beta_2=(1,-1,3,7)$, 求 V_1+V_2, $V_1\cap V_2$ 的一个基与维数.

解 因为 $(\alpha_1,\alpha_2,-\beta_1,-\beta_2)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\y_1\\y_2\end{pmatrix}=0$, $\begin{pmatrix}1&-1&-2&-1\\2&1&1&1\\1&1&0&-3\\0&1&-1&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\y_1\\y_2\end{pmatrix}=0$. (1)

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-2&-1\\2&1&1&1\\1&1&0&-3\\0&1&-1&-7\end{pmatrix}\xrightarrow{\text{行初等变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&-4\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

所以, $\alpha_1,\alpha_2,-\beta_1$ 是 V_1+V_2 的一个基,维$(V_1+V_2)=3$,求得(1)的一个基础解系$(-1,4,-3,1)$所确定的向量 $\gamma=-\alpha_1+4\alpha_2=-3\beta_1+\beta_2=(-5,2,3,4)$ 是 $V_1\cap V_2$ 的基. 维$(V_1\cap V_2)=1$.

例 11 设 $\alpha_1=(1,2,1,0)$, $\alpha_2=(-1,1,1,1)$, $\beta_1=(2,-1,0,1)$, $\beta_2=(1,-1,3,7)$, 试求 $L(\alpha_1,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$ 的一组基与维数.

解 (1) $L(\alpha_1,\alpha_2)$ 为 2 维的, $L(\beta_1,\beta_2)$ 为 2 维的, 可求得 $L(\alpha_1,\alpha_2)+L(\beta_1,\beta_2)$ 为 3 维的,从而,由维数公式得 $L(\alpha_1,\alpha_2)\cap L(\beta_1,\beta_2)$ 为 1 维的.

(2)若 $\alpha \in L(\alpha_1,\alpha_2) \cap L(\beta_1,\beta_2)$,则可设 $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = -y_1\beta_1 - y_2\beta_2$,即 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + y_1\beta_1 + y_2\beta_2 = 0$,得方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2y_1 + y_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - y_1 - y_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3y_2 = 0 \\ x_2 + y_1 + 7y_2 = 0 \end{cases},$$

解得 $x_1 = y_2, x_2 = -4y_2, y_1 = -3y_2$,$y_2$ 为任意数,从而 $\alpha = y_2\alpha_1 - 4y_2\alpha_2 = 3y_2\beta_1 - y_2\beta_2$.

(3)上面方程组的系数矩阵的秩为3,其基础解系由一个解向量组成,取$(1,-4,-3,1)$,从而 $\alpha = \alpha_1 - 4\alpha_2 = 3\beta_1 - \beta_2 = (5,-2,-3,4)$ 因此$(5,-2,-3,4)$是 $L(\alpha_1,\alpha_2) \cap L(\beta_1,\beta_2)$ 的一组基.

5.3.3　向量的坐标

1. 待定系数法求向量的坐标

待定系数法就是将向量 α 由基向量线性表示时,其系数用“待定”的形式,然后根据具体向量空间元素的特点,求出这些系数,从而求得向量在该组基下的坐标.

例12　在 F^4 中,试求 $\alpha = (1,2,1,1)$ 在基

$$\varepsilon_1 = (1,1,1,1), \varepsilon_2 = (1,1,-1,-1),$$
$$\varepsilon_3 = (1,-1,1,-1), \varepsilon_4 = (1,-1,-1,1).$$

下的坐标.

解　设 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3 + x_4\varepsilon_4$,则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 1 \end{cases},$$

解得 $x_1 = \frac{5}{4}, x_2 = \frac{1}{4}, x_3 = x_4 = -\frac{1}{4}$,这就是 α 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标.

2. 借助过渡矩阵,用坐标变换公式求出向量的坐标.

求过渡矩阵的方法是:(1)根据过渡矩阵的定义直接求出;(2)引入第三组基,根据过渡矩阵的性质求出.

例 13　在向量空间 F^4 中,求由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵,并求向量 α 在指定基下的坐标.

$$(1)\begin{cases}\varepsilon_1=(1,0,0,0)\\ \varepsilon_2=(0,1,0,0)\\ \varepsilon_3=(0,0,1,0)\\ \varepsilon_4=(0,0,0,1)\end{cases}\qquad \begin{cases}\eta_1=(2,1,-1,1)\\ \eta_2=(0,3,1,0)\\ \eta_3=(5,3,2,1)\\ \eta_4=(6,6,1,3)\end{cases}.$$

$\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标.

$$(2)\begin{cases}\varepsilon_1=(1,2,-1,0)\\ \varepsilon_2=(1,-1,1,1)\\ \varepsilon_3=(-1,2,1,1)\\ \varepsilon_4=(-1,-1,0,1)\end{cases}\qquad \begin{cases}\eta_1=(2,1,0,1)\\ \eta_2=(0,1,2,2)\\ \eta_3=(-2,1,1,2)\\ \eta_4=(1,3,1,2)\end{cases}.$$

$\alpha=(1,0,0,0)$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标.

解　(1)因为

$$\begin{cases}\eta_1=2\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3+\varepsilon_4\\ \eta_2=3\varepsilon_2+\varepsilon_3\\ \eta_3=5\varepsilon_1+3\varepsilon_2+2\varepsilon_3+\varepsilon_4\\ \eta_4=6\varepsilon_1+6\varepsilon_2+\varepsilon_3+3\varepsilon_4\end{cases}.$$

即
$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}.$$

故由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&0&5&6\\1&3&3&6\\-1&1&2&1\\1&0&1&3\end{pmatrix}.$$

由于 $A^{-1}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}12&9&-27&-33\\1&12&-9&-23\\9&0&0&-18\\-7&-3&9&26\end{pmatrix}$,设 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在 η_1,η_2,η_3,η_4 下的坐标为 (y_1,y_2,y_3,y_4),显然 $\alpha=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在 ε_1,ε_2,ε_3,ε_4 下的坐标为 (x_1,x_2,x_3,x_4),由坐标变换公式有

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}12&9&-27&-33\\1&12&-9&-23\\9&0&0&-18\\-7&-3&9&26\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}.$$

从而

$$\begin{cases}y_1=\frac{4}{9}x_1+\frac{1}{3}x_2-x_3-\frac{11}{9}x_4\\ y_2=\frac{1}{27}x_1+\frac{4}{9}x_2-\frac{1}{3}x_3-\frac{23}{27}x_4\\ y_3=\frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_4\\ y_4=-\frac{7}{27}x_1-\frac{1}{9}x_2+\frac{1}{3}x_3+\frac{26}{27}x_4\end{cases}$$

为 α 在基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标.

(2)求过渡矩阵(略)

求 α 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标,我们知道 $\alpha=(1,0,0,1)$ 在 $e_1=(1,0,0,0)$,$e_2=(0,1,0,0)$,$e_3=(0,0,1,0)$,$e_4=(0,0,0,1)$ 下的坐标为 $(1,0,0,0)$,而 e_1,e_2,e_3,e_4 到 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 的过渡矩阵为

$$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)=(e_1,e_2,e_3,e_4)\begin{pmatrix}1&1&-1&-1\\2&-1&2&-1\\-1&1&1&0\\0&1&1&1\end{pmatrix},$$

故 α 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{13}, \frac{5}{13}, -\frac{2}{13}, -\frac{3}{13}\right).$$

5.3.4 空间分解

1. 判断两个子空间的和是直和的方法

已知两个子空间的和,要判断这个和是否为直和,一般地是根据和是直和的充要条件去判断,常用的方法是判断两个子空间的交 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ 是否成立.

例 14 设在向量空间 $F^{n\times n}$ 中,$W_1 = \left\{A \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0\right\}$,$W_2 = \{\lambda I \mid I$ 为单位矩阵,$\lambda \in F\}$ 为 $F^{n\times n}$ 的子空间,证明 $W_1 + W_2$ 是直和.

证明 $\forall A \in W_1 \cap W_2$,则 $A \in W_1$ 且 $A \in W_2$,因为 $A \in W_2$,则 $A = \lambda I$,又 $A \in W_1$,故有 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = n\lambda = 0$,所以 $\lambda = 0$,即 $A = 0$,由此得 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$,所以 $W_1 + W_2$ 是直和.

例 15 如果 $W_1 = \left\{A \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0\right\}$,而 W_2 为 $F^{n\times n}$ 中全体对角阵组成的子空间,则 $W_1 + W_2$ 不是直和.

证明 只需举一反例,因为 $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in W_1 \cap W_2$. 即 $W_1 \cap W_2 \neq \{0\}$,从而 $W_1 + W_2$ 不是直和.

2. 空间直和分解的方法

设 V 为数域 F 上的向量空间,W_1 和 W_2 是 V 的子空间,要证 $V = W_1 \oplus W_2$,通常分为两步来证,先证 $V = W_1 + W_2$,再证 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$,或在有限维空间时改证,维 V = 维 W_1 + 维 W_2,以代替 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ 的证明.

例16　设$M \in F^{n\times n}$,$f(x) \in F[x]$,$g(x) \in F[x]$,且$(f(x),g(x)) = 1$,$A = f(M)$,$B = g(M)$,W,W_1,W_2分别为方程组$ABX = 0$,$AX = 0$,$BX = 0$的解空间,求证:$W = W_1 \oplus W_2$.

证明　先证$W = W_1 + W_2$

由于$f(M)g(M) = g(M)f(M)$,即$AB = BA$,从而有$AX = 0 \Rightarrow BAX = 0 \Rightarrow ABX = 0$,所以$W_1 \subseteq W_2$,同理可证$W_2 \subseteq W$,故有$W_1 + W_2 \subseteq W$,又由$(f(x),g(x)) = 1$,所以存在多项式$u(x)$,$v(x)$,使$u(x)f(x) + v(x)g(x) = 1$,所以$u(M)f(M) + v(M)g(M) = I$①. 对任意$\alpha \in W$,$AB\alpha = 0$, 即$f(M)g(M)\alpha = 0$②, 由①式$\alpha = u(M)f(M)\alpha + v(M)g(M)\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$,其中$\alpha_2 = u(M)f(M)\alpha$,$\alpha_1 = v(M)g(M)\alpha$,由②知$g(M)\alpha_2 = u(M)f(M)g(M)\alpha = 0$,所以$B\alpha_2 = 0$,$\alpha_2 \in W_2$,同理,$f(M)\alpha_1 = 0$,$A\alpha_1 = 0$,所以$\alpha_1 \in W_1$,这样$\alpha \in W_1 + W_2$,即$W \subseteq W_1 + W_2$. 综合上述可得$W = W_1 + W_2$.

再任取$\alpha \subseteq W_1 \cap W_2$,那么$A\alpha = 0$,$B\alpha = 0$,所以$f(M)\alpha = 0$,$g(M)\alpha = 0$,代入①式得$\alpha = u(M)f(M)\alpha + v(M)g(M)\alpha = 0$. 从而$W_1 \cap W_2 = \{0\}$,故$W = W_1 \oplus W_2$.

3. 维数公式在空间分解的应用

对于有限维向量空间,可利用维数公式(维V = 维W_1 + 维W_2)将空间进行直和分解$F^{(n)} = W_1 \oplus W_2$.

例17　证明,如果$V = V_1 \oplus V_2$,$V_1 = V_{11} \oplus V_{12}$,则$V = V_{11} \oplus V_{12} \oplus V_2$.

证明　由题设知$V = V_{11} + V_{12} + V_2$. 因为$V = V_1 \oplus V_2$,所以维$V$ = 维V_1 + 维V_2,又$V_1 = V_{11} \oplus V_{12}$,所以维$V_1$ = 维V_{11} + 维V_{12},从而维V = 维V_{11} + 维V_{12} + 维V_2. 即$V = V_{11} \oplus V_{12} \oplus V_2$.

4. 生成子空间在空间分解中的应用

利用线性包将空间进行分解,主要是将空间分解成一些生成子空间的直和.

例18　(1)证明:每一个n维向量空间V都可表成n个一维子空间的直和;

(2)对V中任意一子空间V_1,均有子空间V_2,使$V = V_1 \oplus V_2$.

证明　(1)设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维向量空间 V 的一组基，显然 $L(\alpha_1),L(\alpha_2),\cdots,L(\alpha_n)$ 都是一维子空间，又 $L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=L(\alpha_1)+L(\alpha_2)+\cdots+L(\alpha_n)=V$. 且维 $L(\alpha_1)$ + 维 $L(\alpha_2)+\cdots+$ 维 $L(\alpha_n)$ = 维 V，所以 $V=L(\alpha_1)\oplus L(\alpha_2)\oplus\cdots\oplus L(\alpha_n)$.

(2)取 V_1 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$，把它扩充为 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n$，令 $V_2=L(\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n)$，则有 $V=V_1+L(\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_n)$，又维 V_1 + 维 V_2 = 维 V，所以 $V=V_1\oplus V_2$.

5.3.5　同构

证明向量空间同构的一般方法是：构造一个映射，而后按定义验证该映射是同构映射. 对于有限维的情况，也可以证明维数相等，按定理判定同构.

例 19　证明实数域 R 作为自身上的向量空间与向量空间 V 同构，其中：V 是正实数的集合，规定：对于任意的 $\alpha,\beta\in V,\alpha\oplus\beta=\alpha\beta$；对于任意的 $\alpha\in V$，任意的 $k\in\mathrm{R}$，$k\circ\alpha=\beta^k$.

证明 1　对于 V，1 是其零向量. 取 $a\in V,a\neq1$，则 a 线性无关. 又对于任意 $b\in V$，有 $k=\log_a^b$，使 $b=k\circ a$. 所以，a 作成 V 的一组基，从而，V 是一维的. 而 R 作为其自身上的向量空间也是一维的. 因此，根据定理知 $\mathrm{R}\cong V$.

证明 2　作 $\sigma:\mathrm{R}\to V,\sigma(x)=2^x,\forall x\in\mathrm{R}$. 显然，$\sigma$ 是映射，且易证是双射，从略. 又对任意的 $x,y\in\mathrm{R},k\in\mathrm{R}$，有 $\sigma(x+y)=2^{x+y}=2^x\cdot2^y=2^x\oplus2^y=\sigma(x)\oplus\sigma(y),\sigma(kx)=2^{kx}=(2^x)^k=k\circ2^x=k\circ\sigma(x)$. 因此，$\sigma$ 是同构映射，从而 $\mathrm{R}\cong V$.

例 20　V 与 W 分别是数域 F 上 n 与 m 维向量空间，$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 与 $\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$ 分别为 V 与 W 的基. $L(V,W)$ 是所有由 V 到 W 的线性映射的集合，对线性映射的加法与数量乘法构成的向量空间. 证明：$L(V,W)$ 与 $M_{mn}(F)$ 同构.

证明　欲证 $L(V,W)$ 与 $M_{mn}(F)$ 同构，只须在其两者间建立一个同构映射. 为此，由 $\sigma\in L(V,W)$ 有 $\sigma(\alpha_j)=\sum\limits_{i=1}^{m}a_{ij}\beta_i,j=1,2,\cdots,n$. 确定惟一的 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})_{mn}\in M_{mn}(F)$，于是 $f:\sigma\to A,\forall\sigma\in L(V,$

$W)$ 是 $L(V,W)$ 到 $M_{mn}(F)$ 的一个映射,并且是线性映射. 事实上,设 σ, $\tau\in L(V,W)$,有

$$\sigma\to A=(a_{ij});\tau\to B=(b_{ij}),$$

其中 $\sigma(\alpha_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\beta_i, j=1,\cdots,n,\tau(\alpha_j)=\sum_{i=1}^{m}b_{ij}\beta_i, j=1,\cdots,n$,由此可得 $(\sigma+\tau)(\alpha_j)=\sigma(\alpha_j)+\tau(\alpha_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\beta_i+\sum_{i=1}^{m}b_{ij}\beta_i=\sum_{i=1}^{m}(a_{ij}+b_{ij})\beta_i, j=1,\cdots,n$. 因而 $\sigma+\tau\to A+B$,同理可证 $k\sigma\to kA, \forall k\in F,\sigma\in L(V,W)$.

欲证 f 是一个同构映射,只要 f 是一个双射即可. 对此,$\forall A\in M_{mn}(F)$,令 $A=(a_{ij})$,定义 $\sigma:V\to W;\xi=\sum_{j=1}^{n}c_j\alpha_j\to\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_j\beta_i$. 易知 σ 是 V 到 W 的一个线性映射,即 $\sigma\in L(V,W)$. 因此有 $\sigma(\alpha_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\beta_i$, $j=1,2,\cdots,n$. 进而使 $f(\sigma)=A$ 成立,故 f 为 $L(V,W)$ 到 $M_{mn}(F)$ 的满射;同时,f 还是 $L(V,W)$ 到 $M_{mn}(F)$ 的单射. 这是因为,若 $f(\sigma)=A=(a_{ij})$,$f(\tau)=B=(b_{ij})$,且 $A=B$,则 $\forall\xi\in V$,有 $\xi=\sum_{j=1}^{n}c_j\alpha_j$,使 $\sigma(\xi)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}c_j\beta_i=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}c_j\beta_i=\tau(\xi)$,从而 $\sigma=\tau$. 故 f 是 $L(V,W)$ 到 $M_{mn}(F)$ 的同构映射,因而 $L(V,W)$ 与 $M_{mn}(F)$ 同构.

5.4　练习题及答案

5.4.1　练习题

1. 设 n 是固定整数,V 是数域 F 上所有次数等于 n 的多项式的集合. 证明 V 对于多项式的加法及数与多项式的乘法不作成 F 上的向量空间.

2. 判别以下集合对于所指的运算是否构成实向量空间:

(1) 直觉空间中不平行于某一平面的全体向量,对于向量的加法和数积.

(2) 主对角线上各元之和为零的 n 阶矩阵的全体,对于矩阵的加

法和数积.

3. 求实数域上由矩阵 A 的全体实系数多项式组成的空间的维数和一组基,其中 $A = \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{pmatrix}$ $a_i \neq a_j (i \neq j), a_i \in \mathrm{R}$.

4. 求数域 F 上 3 个未知量的 n 次齐次多项式所组成的向量空间 V 的维数及相应的基.

5. 求 R^4 中由下列向量生成的子空间 W 的一组基:
$\alpha_1 = (1,-1,0,1)^T, \alpha_2 = (0,1,2,-1)^T, \alpha_3 = (-1,0,1,0)^T, \alpha_4 = (1,-1,3,1)^T$.
并把其余向量用该组基线性表示.

6. 求 R^n 的下列子空间的维数和一组基:

$$W = \{(x_1,\cdots,x_n) \mid x_1 + \cdots + x_n = 0, x_1,\cdots,x_n \in \mathrm{R}\}.$$

7. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 是 F^n 中两个向量组. 试证:假如这两个向量组都是线性无关向量组,那么空间 $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s) \cap L(\beta_1,\cdots,\beta_t)$ 的维数等于齐次线性方程组 $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_s x_s + \beta_1 y_1 + \cdots + \beta_t y_t = 0(*)$ 的解空间的维数(其中 $\alpha_i, \beta_j, i = 1,\cdots,s; j = 1,\cdots,t$ 都是列向量).

8. 在向量空间 F^4 中,求下面向量 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标:
$\alpha = (0,0,0,1), \varepsilon_1 = (1,1,0,1), \varepsilon_2 = (2,1,3,1), \varepsilon_3 = (1,1,0,0), \varepsilon_4 = (0,1,-1,-1)$.

9. 在 $F_3[x]$ 中,求向量 $1 + x + x^2$ 关于基 $1, x-1, (x-2)(x-1)$ 的坐标.

10. 设实数域 R 上二元数列的集合,对下列计算:

$$(a_1,b_2) \oplus (a_2,b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2 + a_1 a_2);$$

$$k o (a_1,b_1) = (k a_1, k b_1 + \frac{k(k-1)}{2} a_1^2).$$

构成 R 上向量空间 V. 而复数域 C 看作是实数域 R 上向量空间. 试问 C 作为向量空间与 V 是否同构? 若"是",则建立它们间的一个同构映射,并加证明.

11. 在向量空间 R^3 中,设

$$W_1 = \{(a,b,0) \mid a,b \in \mathrm{R}\}, W_2 = \{(0,0,c) \mid c \in \mathrm{R}\},$$

为 R^3 的子空间,且有 $\mathrm{R}^3 = W_1 + W_2$,证明,$W_1 \oplus W_2 = \mathrm{R}^3$.

12. 设 $F^{(n)}$ 是数域 F 上的 n 维列空间,A 是 F 上的 n 阶矩阵,记

$$W_1 = \{Ax \mid \forall x \in F^{(n)}\}, W_2 = \{x \mid Ax = 0, x \in F^{(n)}\}.$$

证明,W_1 与 W_2 是 $F^{(n)}$ 的子空间,当 A 是幂等阵时,$(A^2 = A)$,则有 $F^{(n)} = W_1 \oplus W_2$.

13. 设 $V = R^4$,$W = L(\alpha_1\alpha_2)$,其中 $\alpha_1 = (2,1,-1,3)$,$\alpha_2 = (-1,0,1,2)$,求 W 的一个余子空间 W'.

14. 设 W 为数域 F 上 n 维向量空间 V 的一个非平凡子空间,证明:W 在 V 中有不只一个余子空间.

15. 设 V_1, V_2 为 $V_n(F)$ 的两个子空间. 若 $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + 1$,则 $V_1 \cup V_2$ 是 $V_n(F)$ 的子空间.

16. (1)证明在 $F_{n-1}[x]$ 中,多项式

$f_i = (x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)$,$i = 1,2,\cdots,n$ 是一个基,其中 $a_1,\cdots,a_n$ 是互不相同的数.

(2)在(1)中取 $a_1,\cdots,a_n$ 是全体 n 次单位根,求由基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 到基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的过渡阵.

17. 设 $V_1,\cdots,V_s$ 是向量空间 V 的 s 个非平凡子空间,证明 V 中至少有一向量 α,使 $\alpha \notin V_i$,$i = 1,2,\cdots,s$.

18. 设 $V_1,\cdots,V_s$ 是数域 F 上 n 维向量空间 V 的任意 s 个非平凡子空间. 试证:存在 V 的一个基,使这个基的 n 个基向量均不在 $V_1,\cdots,V_s$ 中.

19. 设 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,证明:由 A 的全体实系数多项式集合 V 关于矩阵的加法与数乘运算构成的R上的向量空间与复数域C作为R上的向量空间同构.

20. 设 $F[t]_4$ 的两组基为

$$(\mathrm{I})\begin{cases} f_1(t) = 1 + t + t^2 + t^3 \\ f_2(t) = -t + t^2 \\ f_3(t) = 1 - t \\ f_4(t) = 1 \end{cases} \qquad (\mathrm{II})\begin{cases} g_1(t) = t + t^2 + t^3 \\ g_2(t) = 1 + t^2 + t^3 \\ g_3(t) = 1 + t + t^3 \\ g_4(t) = 1 + t + t^2 \end{cases}.$$

(1)求由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵 C；

(2)求在两组基下有相同坐标的多项式 $f(t)$.

5.4.2 练习题答案

1. $x^n, -x^n \in V$,但 $x^n + (-x^n) = 0 \notin V$. 因此,$V$ 不作成 F 上的向量空间.

2. (1)不构成向量空间. 因为显见存在一对向量,它们的和可以平行于题设中的某一平面.

(2)设 V 是所给条件构成的空间

① 对任意 $A \in V$,其中 $A = (a_{ij})$,据题设 $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0$. 对任意 $B \in V$,其中 $B = (b_{ij})$,则又有 $\sum_{i=1}^{n} b_{ii} = 0$. 于是 $A + B = C, C = (a_{ij} + b_{ij}), \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = 0$,故 $C \in V$. 又对任意一数 $k, kA = (ka_{ij})$,所以 $\sum_{i=1}^{n} ka_{ii} = 0$,故 $kA \in V$. 从上可知 V 对加法和数积封闭.

② 由于矩阵的加法运算是将对应元素相加,所以由 $A \in V, B \in V, C \in V$ 有 $A + B = B + A \in V, (A + B) + C = A + (B + C) \in V$. 可见 V 对加法满足交换律和结合律. 又零矩阵 0 和负矩阵 $-A$ 为 V 的零元素和负元素.

③ 由矩阵数积运算有 $k(A + B) = kA + kB \in V, (k + l)A = kA + lA \in V, k(lA) = (kl)A \in V$. 可见 V 对数积满足分配律、结合律,且 $1A = A$,故 V 是向量空间.

3. 我们要证明,任意一个 A 的实系数多项式 $f(A)$ 均可由 $I, A, A^2, \cdots, A^{n-1}$ 线性表示,只要证明对任何一个 $k(k = 0,1,2,\cdots)$, A^k 均可用上述 n 个矩阵线性表示, 即要证明有一组数 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$, 使 $A^k = \begin{pmatrix} a_1^k & & & \\ & a_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^k \end{pmatrix} = x_0 I + x_1 A + x_2 A^2 + \cdots + x_{n-1} A^{n-1}$ 成立, 这时

$$\begin{pmatrix} a_1^k & & & \\ & a_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 & & & \\ & x_0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 a_1 & & & \\ & x_1 a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_1 a_n \end{pmatrix} + \cdots$$

$$+ \begin{pmatrix} x_{n-1} a_1^{n-1} & & & \\ & x_{n-1} a_2^{n-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & x_{n-1} a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

由矩阵相等定义知，$\begin{cases} x_0 + x_1 a_1 + x_2 a_1^2 + \cdots + x_{n-1} a_1^{n-1} = a_1^k \\ x_0 + x_1 a_2 + x_2 a_2^2 + \cdots + x_{n-1} a_2^{n-1} = a_2^k \\ \cdots \\ x_0 + x_1 a_n + x_2 a_n^2 + \cdots + x_{n-1} a_n^{n-1} = a_n^k \end{cases}$.

这是一个关于未知量 $x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}$ 的线性方程组，其系数行列式是范德蒙行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \cdots & & & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_i - a_j).$$

又由于 $a_i \neq a_j, (i \neq j)$，所以 $D \neq 0$，从而可知方程组有解：即任意一 $f(A)$ 均可由 $I, A, A^2, \cdots, A^{n-1}$ 线性表示.

又若 $k_0 I + k_1 A + \cdots + k_{n-1} A^{n-1} = 0$，则由上面方法易得 $k_0 = k_1 = \cdots = k_{n-1} = 0$. 即 $I, A, A^2, \cdots, A^{n-1}$ 线性无关. 从而 $I, A, \cdots, A^{n-1}$ 为空间的一组基，其维数为 n.

4. 对任意 $f(x,y,z) \in V$ 可表为 $f(x,y,z) = \sum_{k_1+k_2+k_3=n} a_{k_1k_2k_3} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}$，其中 $a_{k_1k_2k_3} \in F, k_1, k_2, k_3$ 是非负整数，若 $\sum_{k_1+k_2+k_3=n} a_{k_1k_2k_3} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} = 0$，则所有系数 $a_{k_1k_2k_3} = 0$，所以 $\{x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} \mid 0 \leqslant k_i \leqslant n, k_1 + k_2 + k_3 = n\}$ 构成 V 的一

组基. 而它们恰好是$(x+y+z)^n$的展开式中非同类项的项数，即从x，y，z中每次取n个元素的允许重复的组合数. 所以维$V=C_{n+2}^n$.

5. $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\xrightarrow{\text{经初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=A_1$.

因变换矩阵A_1中任意3个列向量均线性无关，知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$的极大无关组为其中任意3个列向量，它们都为$W$的一组基. 如取$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为一组基，由上述变换矩阵$A_1$知$\alpha_4=2\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

6. W的生成元分量满足方程$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$. 由基础解系的求法，得其基础解系为$\alpha_1=(-1,1,0,\cdots,0)$，$\alpha_2=(-1,0,1,0,\cdots,0)$，$\cdots$，$\alpha_{n-2}=(-1,0,\cdots,1,0)$，$\alpha_{n-1}=(-1,0,\cdots,0,1)$即为$W$的一组基，且其维数为$n-1$.

7. 设$V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$，$V_2=L(\beta_1,\cdots,\beta_t)$，由已知条件可知维$(V_1)=s$，维$(V_2)=t$. 因为$V_1+V_2=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)+L(\beta_1,\cdots,\beta_t)=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t)$，所以维$(V_1+V_2)=$秩$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\}$.

以$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t$作列构成矩阵$A$，那么$A$是线性方程组(*)的系数矩阵，因此，秩$\{\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\cdots,\beta_t\}=$秩$(A)$，即维$(V_1+V_2)=$秩$(A)$. 根据维数公式得

$$\begin{aligned}\text{维}(V_1\cap V_2)&=\text{维}(V_1)+\text{维}(V_2)-\text{维}(V_1+V_2)\\&=s+t-\text{秩}(A)\\&=\text{线性方程组}(*)\text{解空间的维数}\end{aligned}$$

8. 设$\alpha=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+k_3\varepsilon_3+k_4\varepsilon_4$，由向量的相等定义得，$k_1=1$，$k_2=0$，$k_3=-1$，$k_4=0$，所以$\alpha$在$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$下的坐标为$(1,0,-1,0)$.

9. 取基$1,x,x^2$. 由

$$\begin{cases}1=1\\x-1=-1+x\\x^2-3x+2=2-3x+x^2\end{cases}.$$

得$(1,x-1,x^2-3x+2)=(1,x,x^2)A$.

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&-3\\0&0&1\end{pmatrix},A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

设 $1+x+x^2$ 关于基 $1,x-1,(x-2)(x-1)$ 的坐标为 (y_1,y_2,y_3)，关于基 $1,x,x^2$ 的坐标为 $(1,1,1)$ 得

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}.$$

即 $1+x+x^2$ 关于基 $1,x-1,(x-2)(x-1)$ 的坐标是 $(3,4,1)$.

10. 经验证，易知 V 的一个基为 $\{(1,0),(0,1)\}$，且对 $\forall(a,b)\in V$，有

$$(a,b)=a\circ(1,0)\oplus\left(b-\frac{a(a-1)}{2}\right)\circ(0,1).$$

而复数域作为实数域上的向量空间，其一个基为 $\{1,i\}$，因此 $\dim V=\dim C=2$. 故复数域 C 作为向量空间与 V 是同构的.

下面我们按照基向量对基向量，坐标不变的对应法则，建立 V 与 C 上的一个同构映射：

$$\varphi:a\circ(1,0)\oplus\left(b-\frac{a(a-1)}{2}\right)\circ(0,1)\to a\cdot 1+\left(b-\frac{a(a-1)}{2}\right)\mathrm{i}.$$

其中 $\forall(a,b)=a\circ(1,0)\oplus\left(b-\frac{a(a-1)}{2}\right)\circ(0,1)\in V.$

事实上，$\forall a+b\mathrm{i}\in C$，有 $\left(a,\frac{2b-a(a-1)}{2}\right)\in V$，使 $\varphi\left(a,\frac{2b-a(a-1)}{2}\right)=a+b\mathrm{i}$，即 $a+b\mathrm{i}$ 有原象，这说明 φ 为满射；同时，当 $(a,b)\neq(c,d)$ 时，其象也不同，这又说明 φ 为单射，因此 φ 为双射.

此外双射 φ 还保持运算，$\forall(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in V$，

$$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2)\to\left[a_1+\left(b_1-\frac{a_1(a_1-1)}{2}\right)i\right]+\left[a_2+\left(b_2-\frac{a_2(a_2-1)}{2}\right)i\right],$$

即得 $\varphi[(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)]=\varphi(a_1,b_1)+\varphi(a_2,b_2).$

同时, $\forall k \in \mathrm{R}, \forall (a,b) \in V$,

$$k\circ(a,b) = \left(ka, kb + \frac{k(k-1)}{2}a^2\right) \to k\left[a + \left(b - \frac{a(a-1)}{2}\right)i\right],$$

即得 $\varphi(k\circ(a,b)) = k\varphi(a,b)$.

故 φ 确为 V 到 C 的一个同构映射.

11. 只需证明 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ 即可.

任取 $(x,y,z) \in W_1 \cap W_2$, 则因 $(x,y,z) \in W_1$, 故必为 $(x,y,0)$ 的形式, 又 $(x,y,z) \in W_2$, 故必为 $(0,0,z)$ 的形式, 所以必有 $(x,y,z) = (0,0,0)$. 从而 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, 即 $R^3 = W_1 \oplus W_2$.

12. 易见 W_1 与 W_2 是 $F^{(n)}$ 的子空间, 下面证明 $F^{(n)} = W_1 \oplus W_2$, 先证 $F^{(n)} = W_1 + W_2$, 显然有 $F^{(n)} \supseteq W_1 + W_2$. 又当 A 是幂等矩阵时, 由于 $F^{(n)}$ 中任意一向量 x 均可表示为 $x = Ax + (x - Ax)$, 而 $Ax \in W_1$, 又 $A(x - Ax) = Ax - A^2x = Ax - Ax = 0$, 所以 $x - Ax \in W_2$, 于是 $F^{(n)} \subseteq W_1 + W_2$, 因而 $F^{(n)} = W_1 + W_2$, 设 ξ 是 $W_1 \cap W_2$ 中任意一向量, 则 $\xi \in W_1$, 于是存在 $\eta \in F^{(n)}$, 使 $\xi = A\eta$, 又因 $\xi \in W_2$, 故 $A\xi = 0$, 于是 $\xi = A\eta = A^2\eta = A(A\eta) = A\xi = 0$, 故 $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, 所以 $F^{(n)} = W_1 \oplus W_2$.

13. 因为 α_1, α_2 线性无关, 所以是 W 的基, 以 α_1, α_2 为列作矩阵及行初等变换:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

令 $\alpha_3 = (0,0,1,0)$, $\alpha_4 = (0,0,0,1)$, 则显然 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 因而作成 R^4 的基, 故 W 的一个余子空间 $W' = L(\alpha_3 \alpha_4)$.

14. 分二步证之.

首先存在性. 由于 W 为 $V_n(F)$ 的非平凡子空间, 则令 $\dim W = r$, 有 $0 < r < n$, 且 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 为 W 一基, 即有 $W = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_r)$. 在 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ 的基础上, 扩充为 V 的基: $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n$. 于是令 $W' = L(\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_n)$, 便有 $W \cap W' = \{0\}$, $V = W + W'$. 即 $V = W \oplus W'$, 亦即 W' 为

W 在 V 中一余子空间.

其次非惟一性. 由于 $V = W \oplus W'$ 知 W 与 W' 皆为 V 的非平凡子空间,因此,存在 $\beta_1 \in V$ 使 $\beta_1 \notin W, \beta_1 \notin W'$ 且由 $\alpha, \cdots, \alpha_r$ 为 W 一基知 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1$ 线性无关. 对此扩充为 $V_n(F)$ 一基:

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{n-r}.$$

于是令 $W'_1 = L(\beta_1, \cdots, \beta_{n-r})$,易知 $W \cap W'_1 = \{0\}, V = W + W'_1$,即 $V = W \oplus W'_1$. 亦即 W'_1 为 W 在 V 中又一余子空间.

同时,由 $\beta_1 \in W'_1, \beta_1 \notin W'$ 知 $W' \neq W'_1$.

综上所述,有限维向量空间的非平凡子空间有不只一个余子空间.

15. 由维数定理 $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$ 及题设条件得 $2\dim(V_1 \cap V_2) + 1 = \dim(V_1) + \dim(V_2)$,进而有 $(\dim V_1 - \dim(V_1 \cap V_2)) + (\dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)) = 1$. 故有两种可能:或 $\dim V_1 = \dim(V_1 \cap V_2)$,则 $V_1 \cap V_2 = V_1$,即 $V_1 \subseteq V_2$;或 $\dim V_2 = \dim(V_1 \cap V_2)$,则 $V_1 \cap V_2 = V_2$,即 $V_2 \subseteq V_1$. 因此,$V_1 \cup V_2 = V_2$ 或 V_1. 故 $V_1 \cup V_2$ 为 $V_n(F)$ 的子空间.

16. (1)要证 $f_1, f_2, \cdots f_n$ 为 $F_{n-1}[x]$ 的一基,只须证这 n 个多项式在 $F_{n-1}[x]$ 中线性无关即可.

事实上,若 $k_1f_1 + k_2f_2 + \cdots + k_nf_n = 0$, ①

则令 $x = a_1$ 代入①式,由于 $f_j(a_1) = 0, j = 2, \cdots, n, f_1(a_1) \neq 0$,得 $k_1 = 0$. 同理,将 $x = a_2, \cdots, a_n$ 分别代入①式,由于 $f_j(a_i) = 0, i \neq j, f_i(a_i) \neq 0$,必得 $k_2 = \cdots = k_n = 0$. 故 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 线性无关.

(2)由于

$$f_1 = \frac{x^n - 1}{x - 1} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1},$$

$$f_2 = \frac{x^n - 1}{x - \varepsilon} = \varepsilon^{n-1} + \varepsilon^{n-2}x + \cdots + \varepsilon x^{n-2} + x^{n-1},$$

$$f_3 = \frac{x^n - 1}{x - \varepsilon^2} = \varepsilon^{n-2} + \varepsilon^{n-4}x + \cdots + \varepsilon^2 x^{n-2} + x^{n-1},$$

$$\cdots\cdots,$$

$$f_n = \frac{x^n - 1}{x - \varepsilon^{n-1}} = \varepsilon + \varepsilon^2 x + \cdots + \varepsilon^{n-1}x^{n-2} + x^{n-1}.$$

所以,由基 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 到基 $f_1, \cdots, f_n$ 的过渡矩阵为

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{n-2} & \cdots & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon^{n-2} & \varepsilon^{n-4} & \cdots & \varepsilon^2 \\ \cdots & & & & \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \cdots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

17. 对 s 采用归纳法证之.

1° 当 $s = 2$ 时,由于 V_1, V_2 为 V 的非凡子空间,必有 $\alpha_1, \alpha_2 \in V$ 使 $\alpha_1 \notin V_1, \alpha_2 \notin V_2$.

若 $\alpha_1 \notin V_2$,即 α_1 即为所求;若 $\alpha_2 \notin V_1$,则 α_2 即为所求.

若 $\alpha_1 \in V_2, \alpha_2 \in V_1$,则令 $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$,必有 $\alpha \notin V_i, i = 1,2$. 故 $s = 2$ 时结论正确.

2° 假设 $s-1$ 时命题成立,即 $\exists \beta_1 \in V$,使 $\beta_1 \notin V_i, i = 1,2,\cdots,s-1$. 若 $\beta_1 \notin V_s$,则结论得证. 设 $\beta_1 \in V_s$,同理 $\exists \beta_2 \in V$,使 $\beta_2 \notin V_j, j = 2,\cdots s$. 若 $\beta_2 \notin V_1$,则结论得证. 设 $\beta_2 \in V_1$,由 β_1, β_2 作 $\alpha_k = \beta_1 + k\beta_2$,其中 k 为正整数,易知 $\alpha_k \notin V_1, \alpha_k \notin V_s$.

同时,$V_2, \cdots, V_{s-1}$ 这 $s-2$ 个非平凡子空间中每一个至多含一个 α_k. 否则,当 $k_1 \neq k_2$ 时,若 $\alpha_{k_1}, \alpha_{k_2} \in V_i, i = 2,\cdots,s-1$,则由 $\alpha_{k_1} = \beta_1 + k_1\beta_2, \alpha_{k_2} = \beta_1 + k_2\beta_2$ 推得 $\beta_1, \beta_2 \in V_i$,这与 β_1, β_2 的选取相矛盾.

因此,由正整数 k 的不同而得到无限多个 α_k 中至少有一个 α_{k_0},使 $\alpha_{k_0} \notin V_i, i = 1,2,\cdots,s$. 故结论成立.

18. 由于 $V_1, \cdots, V_s$ 为 V 的 s 个非平凡子空间,则存在 $\alpha_1 \in V$,使 $\alpha_1 \notin V_i, i = 1,\cdots,s$,对此考虑 V 的非平凡子空间: $V_1, V_2, \cdots, V_s, L(\alpha_1)$. 则存在 $\alpha_2 \in V$,使 $\alpha_2 \notin V_i, i = 1,\cdots,s, \alpha_2 \notin L(\alpha_1)$,而由 $\alpha_2 \notin L(\alpha_1)$ 知 α_1, α_2 线性无关. 于是必存在 $\alpha_3 \in V$,使 $\alpha_3 \notin V_i, i = 1,\cdots,s, \alpha_3 \notin L(\alpha_1\alpha_2)$,且 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关(否则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关,而 α_1, α_2 线性无关,推得 α_3 为 α_1, α_2 的线性组合,即 $\alpha_3 \in L(\alpha_1\alpha_2)$,矛盾). 同时 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 全不属于 $V_1, \cdots, V_s$. 这样经过上述 $n-1$ 次证法后,得到 V 的线性无关向量 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$,使它们全不在 $V_1, \cdots, V_s$ 中,最后,存在 $\alpha_n \in$

V，使 $\alpha_n \notin V_i, i = 1,\cdots,s, \alpha_n \notin L(\alpha_1,\cdots\alpha_{n-1})$，且 $\alpha_1,\cdots\alpha_n$ 线性无关，因此得到 V 的一个基 $\alpha_1,\cdots\alpha_n$，使其每一基向量 $\alpha_i, i = 1,\cdots,n$，全不在 $V_1,\cdots,V_s$ 中.

19. 复数域 C 作为 R 上的向量空间是 2 维的，且 1，i 是一组基. 由于 $A^2 = -I, A^3 = -A, A^4 = I$，所以 V 中任意一元素都可由 A, I 线性表示，且 A, I 线性无关，是 V 的一组基，所以 $\dim V = 2$，故它们同构.

20. 取 $F[t]_4$ 的基 $1, t, t^2, t^3$，则有

$(f_1, f_2, f_3, f_4) = (1, t, t^2, t^3)C_1$，$(g_1, g_2, g_3, g_4) = (1, t, t^2, t^3)C_2$. 其中

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是

$$(g_1, g_2, g_3, g_4) = (f_1, f_2, f_3, f_4)C_1^{-1}C_2 = (f_1, f_2, f_3, f_4)C.$$

即由基(Ⅰ)到基(Ⅱ)的过渡矩阵为

$$C = C_1^{-1}C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) 设 $f(t)$ 在两组基下的坐标均为 $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)'$，由坐标变换公式得 $x = Cx$，即 $(I - C)x = 0$. 可求得该齐次线性方程组只有零解 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$，故在两组基下有相同的坐标的多项式只有 $f(t) = 0 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 = 0$.

第 6 章　线 性 变 换

线性变换是向量空间中最基本的变换，是高等代数研究的一个主要对象. 它在讨论向量空间的向量间的内在联系及向量空间的结构中有重要的作用. 我们主要讨论有限维向量空间的线性变换及其运算，线性变换的矩阵表示及线性变换的特征值与特征向量等. 通过学习要认识到线性变换和矩阵的联系，进一步体会矩阵的重要性.

6.1　内容提要

6.1.1　线性变换及其运算

1. 线性变换的定义与性质

设 V 是数域 F 上的向量空间，σ 是 V 的变换. 若对于 V 中的任意向量 α,β，F 中的任意数 k，均成立：(1) $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$，(2) $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$，则称 σ 是向量空间 V 的一个线性变换.

注　σ 是线性变换的充分必要条件是

$$\sigma(k\alpha+l\beta)=k\sigma(\alpha)+l\sigma(\beta),\ \forall\alpha,\beta\in V,k,l\in F.$$

下面是几个重要的线性变换：

(1) 零变换 T_0：$T_0(\alpha)=0,\forall\alpha\in V$；

(2) 单位变换（恒等变换）T_e：$T_e(\alpha)=\alpha,\forall\alpha\in V$；

(3) 由数 $k\in F$ 决定的数乘（相似、位似）变换 T_k：$T_k(\alpha)=k\alpha,\forall\alpha\in V$；

(4) 射影变换 $T_{P(W)}$：$V=W\oplus U$，$\alpha\in V$，有惟一的分解式

$$\alpha=\beta+\gamma,\beta\in W,\gamma\in U,T_{P(W)}(\alpha)=\beta.$$

线性变换的基本性质：

设 V 是数域 F 上的向量空间，σ 是 V 的线性变换：

(1) $\sigma(0)=0,\sigma(-\alpha)=-\sigma(\alpha)$；

(2) 线性变换保持线性组合与线性关系式不变，即若 $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s$，则 $\sigma(\beta)=k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+$

$k_s\sigma(\alpha_s)$. 又若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 之间有一线性关系 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$,则它们的象之间也有同样的关系 $k_1\sigma(\alpha_1)+k_2\sigma(\alpha_2)+\cdots+k_s\sigma(\alpha_s)=0$.

(3)线性变换把线性相关的元素组变成线性相关的元素组.

注1　利用 $\sigma(0)\neq 0$ 可知 σ 不是线性变换.

注2　线性变换可能把线性无关的元素组变成线性相关的元素组,如零变换就是这样. 但如果线性变换是一个单射,则它把线性无关的元素组变成线性无关的元素组.

2. 线性变换的运算

(1)加法

若 σ,τ 是向量空间 V 的线性变换,则

①$\sigma+\tau:(\sigma+\tau)(\alpha)=\sigma(\alpha)+\tau(\alpha),\forall\alpha\in V$,称为 σ 与 τ **的和**;

②$-\sigma:(-\sigma)(\alpha)=-\sigma(\alpha),\forall\alpha\in V$,称为 σ 的**负变换**;

③$\sigma-\tau=\sigma+(-\tau)$,称为 σ 与 τ 的**差**.

性质:对于 V 中的任意变换 σ,τ,ψ,均成立:

①$\sigma+\tau=\tau+\sigma$;　②$(\sigma+\tau)+\psi=\sigma+(\tau+\psi)$;

③$\sigma+(-\sigma)=T_0$;　④$\sigma+T_0=\sigma$.

定理　若 σ,τ 是 V 的线性变换,则 $\sigma+\tau$ 也是 V 的线性变换,$-\sigma$, $\sigma-\tau$ 同样也是 V 的线性变换. 从而,线性变换的加法具有性质①~④.

(2)数量乘法

若 σ 是向量空间 V 的变换,k 是 F 中的数,则 $k\sigma:(k\sigma)(\alpha)=k\sigma(\alpha),\forall\alpha\in V$,称为 k 与 σ 的**数量乘积**.

性质　对于 V 的任意线性变换 σ,τ,F 中的任意数 k,l,均成立:

⑤$(k+l)\sigma=k\sigma+l\sigma$;　⑥$k(\sigma+\tau)=k\sigma+k\tau$;

⑦$k(l\sigma)=(kl)\sigma$;　⑧$1\sigma=\sigma$.

定理　若 σ 是 V 的线性变换,k 是 F 中的数,则 $k\sigma$ 也是 V 的线性变换. 从而,线性变换的数量乘法具有性质⑤~⑧.

(3)乘法

若 σ,τ 是向量空间 V 的变换,则 $\tau\sigma:(\tau\sigma)(\alpha)=\tau(\sigma(\alpha)),\forall\alpha\in V$,称为 σ 与 τ 的**乘积**.

性质　对于 V 的任意变换 σ,τ,ψ，F 中的任意数 k，有

⑨ $(\sigma\tau)\psi = \sigma(\tau\psi)$；　⑩ $T_e\sigma = \sigma T_e = \sigma$；

⑪ $T_0\sigma = \sigma T_0 = T_0$；　⑫ $k(\sigma\tau) = (k\sigma)\tau = \sigma(k\tau)$；

⑬ $(\tau+\psi)\sigma = \tau\sigma + \psi\sigma$；　⑭ $\sigma\tau \neq \tau\sigma$；

⑮ $\sigma\tau = T_0$ 不能推出 $\sigma = T_0$ 或 $\tau = T_0$；

⑯ $\sigma\tau = \sigma\psi, \sigma \neq T_0$ 不能推出 $\tau = \psi$.

定理　若 σ,τ 是 V 的线性变换，则 $\tau\sigma$ 是 V 的线性变换. 从而，线性变换的乘法具有性质⑨～⑯. 此外，还具有性质：

⑬′ $\sigma(\tau+\psi) = \sigma\tau + \sigma\psi$.

(4)逆变换

设 σ 是向量空间 V 的变换，若存在 V 的变换 τ，使得 $\sigma\tau = \tau\sigma = T_e$，则称 σ 是 V 的**可逆变换**，称 τ 是 σ 的**一个逆变换**.

性质　⑰ 若 σ 是 V 的可逆变换，则 σ 的逆变换惟一，记作 σ^{-1}，从而

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = T_e；$$

⑱ σ 是 V 的可逆变换 $\Leftrightarrow \sigma$ 是 V 到 V 的双射；τ 是 σ 的一个逆变换 $\Leftrightarrow$ 任意 $\beta \in V$，当 $\sigma(\alpha) = \beta$ 时，有 $\tau(\beta) = \alpha$.

定理　若 σ 是 V 的线性变换，且 σ 是可逆变换，则 σ 的逆变换也是线性变换. 从而，可逆线性变换具有性质⑰ 与⑱. 此外，还具有性质⑲与⑳：

⑲ σ 是 V 的一个可逆线性变换 $\Leftrightarrow \sigma$ 是 V 到自身的一个同构映射；若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 n 维向量空间 V 的一组基，σ 是 V 的线性变换，则 σ 是可逆的 $\Leftrightarrow \sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 线性无关.

⑳若 σ 是有限维向量空间 V 的线性变换，则 σ 将 V 中线性无关的向量组变为线性无关的向量组 $\Leftrightarrow \sigma$ 是可逆的.

(5)方幂

设 n 是正整数，σ 是向量空间 V 的变换，则 n 个 σ 的积 $\sigma\sigma\cdots\sigma$ 称为 σ 的 n 次幂，记作 σ^n. 又 $\sigma^0 = T_e$，当 σ 是可逆变换时，$\sigma^{-n} = (\sigma^{-1})^n$.

性质　㉑ $\sigma^m\sigma^n = \sigma^{m+n}$；　㉒ $(\sigma^m)^n = \sigma^{mn}$；　㉓ $(\sigma\tau)^n \neq \sigma^n\tau^n$.

当 σ,τ 为 V 的任意变换时，m,n 为非负整数；当 σ,τ 为可逆变换时，m，

n 为任意整数.

定理　若 σ 是 V 的线性变换,则 σ 的方幂也是 V 的线性变换. 从而,线性变换的方幂具有性质㉑～㉓.

(6)多项式

设 $f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in F[x]$,$\sigma$ 是向量空间 V 的变换,则 $f(\sigma) = a_m\sigma^m + a_{m-1}\sigma^{m-1} + \cdots + a_1\sigma + a_0 T_e$ 是 V 的一个变换,称为**变换 σ 的多项式**.

性质　㉔设 $f(x),g(x),h(x) \in F[x]$,σ 是 V 的变换. 若 $h(x) = f(x) + g(x)$,则 $h(\sigma) = f(\sigma) + g(\sigma)$.

定理　线性变换的多项式是线性变换. 从而,具有性质㉔. 此外,还具有性质:

㉔′设 $f(x),g(x),l(x) \in F[x]$,σ 是 V 的线性变换,若 $l(x) = f(x)g(x)$,则 $l(\sigma) = f(\sigma)g(\sigma)$. 特别地,$f(\sigma)g(\sigma) = g(\sigma)f(\sigma)$.

6.1.2　线性变换的矩阵

设 V 是数域 F 上的 n 维向量空间,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基.

1. 如果 V 的线性变换 σ 与 τ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 上的作用相同,即 $\sigma(\alpha_i) = \tau(\alpha_i)(i = 1,2,\cdots,n)$,则 $\sigma = \tau$.

2. 对 V 中任意一组元素 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$,存在惟一的线性变换 σ 使 $\sigma(\alpha_i) = \beta_i(i = 1,2,\cdots,n)$.

3. 设 σ 是 V 的线性变换,基的象可以被基线性表出

$$\begin{cases}\sigma(\alpha_1) = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + a_{n1}\alpha_n \\ \sigma(\alpha_2) = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{n2}\alpha_n \\ \cdots \\ \sigma(\alpha_n) = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + a_{nn}\alpha_n\end{cases}.$$

用矩阵乘法形式表示为

$$\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) = (\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n)) = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A.$$

其中 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$.

矩阵 A 称为 σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵.

4. 设 V 的线性变换 σ 与 τ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵分别是 A 与 B，则

(1) $\sigma+\tau$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 $A+B$；

(2) $k\sigma$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 $kA(k\in F)$；

(3) $\sigma\tau$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 AB；

(4) σ 可逆的充分必要条件是 A 可逆，且 σ^{-1} 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A^{-1}；

(5) 设 $\alpha\in V$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，则 $\sigma(\alpha)$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标 $(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$ 满足

$$\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

5. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是数域 F 上向量空间 V 的两组基，且由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为 X，又设 V 的线性变换 σ 在这两组基下的矩阵分别为 A 和 B，则 $B=X^{-1}AX$.

6.1.3 相似矩阵

1. 矩阵相似的定义

设 A,B 为数域 F 上两个 n 阶矩阵，如果存在数域 F 上的 n 阶可逆矩阵 X，使得 $B=X^{-1}AX$，则称 A 相似于 B，记为 $A\sim B$；并称由 A 变到 B 的变换为相似变换，称 X 为相似变换矩阵.

2. 相似矩阵的性质

设 n 阶矩阵 A 与 B 相似，则

(1) $rankA=rankB$；

(2) $|A|=|B|$；

(3) $|\lambda I-A|=|\lambda I-B|$ $(\lambda\in F)$；

(4) A' 与 B' 相似，A^k 与 B^k 相似，A^{-1} 与 B^{-1} 相似(如果 A 可逆的话)；

(5) 若 $f(x)$ 是数域 F 上任意一多项式，则 $f(A)\sim f(B)$；

(6) $A \sim A$;若 $A \sim B$,则 $B \sim A$;若 $A \sim B$,$B \sim C$,则 $A \sim C$.

3. 线性变换在不同基下的矩阵是相似的,且相似变换矩阵是两组基之间的过渡矩阵.

6.1.4　矩阵的特征值与特征向量

1. 矩阵的特征值与特征向量的定义

设 A 是数域 F 上的一个 n 阶矩阵,如果存在数 λ 和数域 F 上的 n 维非零列向量 x,使得 $Ax = \lambda x$,则称 λ 为 A 的特征值,x 为 A 的对应特征值 λ 的特征向量,称 $\lambda I - A$ 为 A 的特征矩阵;称 $|\lambda I - A|$ 为 A 的特征多项式,记作$f_A(\lambda)$,这是数域 F 上的一个 n 次多项式;称 $|\lambda I - A| = 0$ 为 A 的**特征方程**.

n 阶矩阵 A 的主对角线上元素之和称为 A 的迹,记作 $Tr(A)$.

n 阶矩阵 A 的特征多项式 $f_A(\lambda)$ 是数域 F 上的 n 次多项式,且 $f_A(\lambda) = \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n |A|$,$\lambda^{n-1}$ 的系数是 $-Tr(A)$,常数项是$(-1)^n |A|$.

2. 求 n 阶矩阵 A 的特征值与特征向量的步骤如下:

第一步　由特征方程 $|\lambda I - A| = 0$ 求得 A 的 n 个特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$;

第二步　求解齐次线性方程组 $(\lambda_i I - A)x = 0$,其非零解向量就是 A 对应于特征值 λ_i 的特征向量.

3. 矩阵的特征值与特征向量具有如下一些性质

(1) 若 λ_i 是矩阵 A 的 r_i 重特征值,A 对应特征值 λ_i 有 s_i 个线性无关的特征向量,则 $1 \leqslant s_i \leqslant r_i$.

(2) 如果 x,y 都是矩阵 A 的对应特征值 λ_0 的特征向量,则当 $kx + ly \neq 0$ 时,$kx + ly$ 仍是 A 的对应特征值 λ_0 的特征向量.

(3) 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$,则

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n = |A|.$$

(4) 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是矩阵 A 的互异特征值,其对应的特征向量分别是 $x_1, x_2, \cdots, x_s$,则 $x_1, x_2, \cdots, x_s$ 线性无关.

(5) 如果 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是矩阵 A 的互异特征值,λ_i 对应的线性无关特征向量为 $x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{ir_i}$,则向量组

$$x_{11},x_{12},\cdots,x_{1r_1},x_{21},x_{22},\cdots,x_{2r_2},\cdots,x_{s1},x_{s2},\cdots,x_{sr_s}$$

线性无关.

(6)设 $B = X^{-1}AX$,即矩阵 A 与 B 相似. 如果 λ_i 是 A 的特征值,x_i 是 A 对应特征值 λ_i 的特征向量,则 λ_i 是 B 的特征值,且 B 对应特征值 λ_i 的特征向量是 $X^{-1}x_i$.

6.1.5　线性变换的特征值与特征向量

1. 线性变换特征值与特征向量的定义

设 σ 是数域 F 上向量空间 V 的一个线性变换,如果存在 F 中一个数 λ 和 V 中非零元素 α,使得 $\sigma(\alpha) = \lambda\alpha$,则称 λ 为 σ 的一个特征值,而称 α 为 σ 的属于特征值 λ 的一个特征向量. 由 σ 的属于特征值 λ 的全部特征向量,再添上零元素构成的集合

$$V_\lambda = \{\alpha \mid \sigma(\alpha) = \lambda\alpha, \alpha \in V\}.$$

构成 V 的一个子空间,称为 σ 的一个特征子空间.

2. 有限维向量空间上求线性变换的特征值与特征向量

设 V 是数域 F 上 n 维向量空间,σ 是 V 中的线性变换,求 σ 的特征值与特征向量的步骤如下:

第一步　取 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,求 σ 在该基下的矩阵 A;

第二步　求矩阵 A 在数域 F 中的特征值 λ 及相应的特征向量 $x = (x_1,x_1,\cdots,x_n)'$;

第三步　A 的特征值 λ 就是 σ 的特征值,而 σ 对应特征值 λ 的特征向量为

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n.$$

3. σ 的特征子空间 V_λ 的维数等于 σ 的属于特征值 λ 的线性无关特征向量的最大个数.

6.1.6　哈密尔顿 - 凯莱(Hamilton - Caylay)定理

1. 设 A 是数域 F 上一个 n 阶矩阵,$f_A(\lambda) = |\lambda I - A|$ 是 A 的特征多项式,则 $f_A(A) = 0$.

2. 设 σ 是数域 F 上 n 维向量空间 V 的线性变换,且 σ 在 V 的一组基下的矩阵为 A,$f_\sigma(\lambda) = |\lambda I - A|$ 是 A 的特征多项式(也称为 σ 的特征多项式),则 $f_\sigma(\sigma) = T_0$.

6.1.7　相似对角化

1. 如果数域 F 上的 n 阶矩阵 A 可相似于对角矩阵，则称 A 可对角化.

2. 数域 F 上 n 阶矩阵 A 可对角化的条件如下：

(1)(充分必要条件) A 有 n 个线性无关的特征向量；

(2)(充分条件) A 有 n 个互异的特征值；

(3)(充分必要条件) A 的所有重特征值对应的线性无关特征向量的个数等于其重数.

3. n 阶矩阵 A 相似于对角矩阵的计算：

第一步　求 A 的特征值和对应的线性无关特征向量. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 为 A 的所有互异特征值，其重数分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_s$，且 $r_1+r_2+\cdots+r_s=n$. 又设对应特征值 λ_i 的 r_i 个线性无关的特征向量为 $x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{ir_i}(i=1,\cdots,s)$；

第二步　构造相似变换矩阵

$$X=(x_{11},x_{12},\cdots,x_{1r_1},x_{21},x_{22},\cdots,x_{2r_2},\cdots,x_{s1},x_{s2},\cdots,x_{sr_s}).$$

则有

$$X^{-1}AX=\begin{pmatrix}\lambda_1I_{r_1} & & & \\ & \lambda_2I_{r_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_sI_{r_s}\end{pmatrix}.$$

4. 设 σ 是数域 F 上 n 维向量空间 V 的一个线性变换，σ 的矩阵可以在某一组基下为对角矩阵有下列条件：

(1)(充分必要条件) σ 有 n 个线性无关的特征向量；

(2)(充分条件) σ 在数域 F 中有 n 个不同的特征值；

(3)(充分必要条件)设 σ 的全部互异的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$，则 σ 的特征子空间 $V_{\lambda_1},V_{\lambda_2},\cdots,V_{\lambda_s}$ 的维数之和等于 n.

5. 求一组基使线性变换在该基下的矩阵为对角矩阵的计算：

第一步　取 n 维向量空间 V 的一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$，求线性变换 σ 在该基下的矩阵 A；

第二步　求 n 阶可逆矩阵 X，使 $X^{-1}AX=\Lambda$ 为对角矩阵；

第三步　由 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)X$,求出 V 的另一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,则 σ 在该基下的矩阵为对角矩阵 A.

6.1.8　线性变换的值域与核

1. 设 V 是数域 F 上的向量空间,σ 是 V 的线性变换,由 σ 的全体象组成的集合称为 **σ 的值域**,记为 $\sigma(V)$,即

$$\sigma(V)=\{\sigma(\alpha)\mid\alpha\in V\},$$

所有被 σ 变成零元素的元素组成的集合称为 **σ 的核**,记为 $\sigma^{-1}(0)$,即

$$\sigma^{-1}(0)=\{\alpha\mid\sigma(\alpha)=0,\alpha\in V\}.$$

$\sigma(V)$ 与 $\sigma^{-1}(0)$ 都是 V 的子空间,称 $\sigma(V)$ 的维数为 **σ 的秩**,称 $\sigma^{-1}(0)$ 的维数为 **σ 的零度**.

2. 线性变换的值域与核有下列结果:

设 V 是数域 F 上的 n 维向量空间,σ 是 V 的一个线性变换.

(1) 取 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,则

$$\sigma(V)=L(\sigma(\alpha_1),\sigma(\alpha_2),\cdots,\sigma(\alpha_n)).$$

(2) 若 σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A ,则

$$\sigma\text{ 的秩}=A\text{ 的秩}.$$

(3) σ 的秩 $+$ σ 的零度 $=n$.

(4) σ 是双射 $\Leftrightarrow\sigma$ 是单射 $\Leftrightarrow\sigma$ 是满射.

6.1.9　不变子空间

1. 设 σ 是数域 F 上向量空间 V 的线性变换,W 是 V 的子空间. 如果对任意 $\alpha\in W$ 都有 $\sigma(\alpha)\in W$,则称 **W 是 σ 的不变子空间**,简称为 σ-子空间.

2. 一些常用的不变子空间:

设 σ 是数域 F 上向量空间 V 的线性变换,则:

(1) V 与 $\{0\}$ 是 σ 的不变子空间;

(2) $\sigma(V)$ 与 $\sigma^{-1}(0)$ 是 σ 的不变子空间;

(3) σ 的特征子空间 $V_\lambda=\{\alpha\mid\sigma(\alpha)=\lambda\alpha,\alpha\in V\}$ 是 σ 的不变子空间;

(4) σ 的不变子空间的交与和还是 σ 的不变子空间.

6.1.10　不变子空间与线性变换的矩阵的化简

1. 设 V 是数域 F 上的 n 维向量空间，σ 是 V 的线性变换，W 是 V 的子空间且是 σ 的不变子空间. 取 W 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$，并把它扩充成 V 的一组基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_n$，则 σ 在该基下的矩阵为 $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}$，其中 k 阶矩阵 A_1 是将 σ 看成 W 上的线性变换时在 W 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 下的矩阵.

2. 如果 n 维向量空间 V 可以分解成若干个线性变换 σ 的不变子空间的直和 $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s$，取 W_i 的基 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{ir_i}(i = 1,2,\cdots,s)$，把它们合起来构成 V 的一组基

$$\alpha_{11},\alpha_{12},\cdots,\alpha_{1r_1},\alpha_{21},\alpha_{22},\cdots,\alpha_{2r_2},\cdots,\alpha_{s1},\alpha_{s2},\cdots,\alpha_{sr_s},$$

则 σ 在该基下的矩阵为准对角矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中 r_i 阶矩阵 A_i 是将 σ 看成 W_i 的线性变换时在 W_i 的基 $\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_i}$ 下的矩阵.

3. 设 V 是数域 F 上的 n 维向量空间，σ 是 V 的线性变换. 如果 σ 的特征多项式 $f(\lambda)$ 可分解为一次因式的乘积，即

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{r_1}(\lambda - \lambda_2)^{r_2}\cdots(\lambda - \lambda_s)^{r_s},$$

则 V 可以按特征值分解成不变子空间的直和

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_s,$$

其中 $W_i = \{\alpha \mid (\sigma - \lambda_i T_e)^{r_i}\alpha = 0,\alpha \in V\}(i = 1,2,\cdots,s)$.

6.1.11　若尔当(Jordan)标准形

1. 如下形式的准对角矩阵

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix}. \text{ 其中 } J_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & & \\ 1 & \lambda_i & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & \lambda_i \end{pmatrix}_{k_i \times k_i},\lambda_i \in \mathrm{C}.$$

称为若尔当形矩阵，称 J_i 为 k_i 阶若尔当块，其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_s$ 可以有相等的.

2. 每个 n 阶复矩阵 A 都与一个若尔当形矩阵相似.

3. 设 σ 是复数域上 n 维向量空间 V 的一个线性变换，则必存在 V 的一组基，使 σ 在这组基下的矩阵是若尔当形矩阵.

6.2　重点和难点

本章的重点是：线性变换的矩阵与矩阵相似，特征值与特征向量，线性变换的矩阵可以对角化的条件与方法.

线性变换在一组基下的矩阵，或简单地说，线性变换的矩阵，直接贯穿于全章的大部分内容中，而且线性变换的矩阵的化简，是我们追求的目标与研究的中心. 线性变换的矩阵给 n 维向量空间的线性变换以具体的刻划，使线性变换的运算转化为矩阵的运算，反之，在必要时，也把矩阵的问题转化为线性变换来处理，二者是同一事物的两种表现形式，具有完全相同的代数性质. 由 n 维向量空间的线性变换在不同基下的矩阵的关系的问题，引入了矩阵相似的概念，研究矩阵相似是高等代数的一个基本内容，比矩阵等价与矩阵合同更为重要. 因此，线性变换的矩阵与矩阵相似，成为本章的一个重点.

特征值与特征向量，是基本的概念与基本的工具，不仅本章中用到，以后还要用，因此，成为本章的一个重点. 特征值与特征向量的求法，不仅要掌握，而且要熟练，计算要迅速、准确. 特征值与特征向量的各种结论，是研究矩阵化简的理论基础，也必须理解，并能够应用. 另外，还要从不同角度认识此概念引入的必要性与合理性.

线性变换的矩阵的化简，是本章的中心，但是，本章仅彻底解决了可以对角化的问题. 因此，线性变换的矩阵可以对角化的条件与方法，成为本章的一个重点. 要理解并掌握线性变换的矩阵可以对角化的必要条件、必要充分条件和充分条件，对于几个必要充分条件，要认识它们本质上的一致性. 另外，还要会具体地求出对角形以及基的过渡矩阵，即掌握对角化的方法.

本章的难点是：特征值与特征向量，不变子空间，哈密尔顿—凯莱

定理及应用.

特征值与特征向量,既是本章的一个重点,又是本章的一个难点,原因在于:(1)概念本身较抽象;(2)不容易讲清引入的背景;(3)计算较复杂,不仅量大,而且所用的知识多;(4)关于不同特征值的特征向量线性无关的结论,证明也较复杂.解决困难的方法是:(1)要从不同的侧面理解引入概念的必要性与合理性;(2)用解析几何的事实作解释,若线性变换σ把非零向量ξ变为与ξ共线的向量$\lambda_0\xi$,则ξ就是σ的属于特征值λ_0的特征向量;(3)用一些较简单的例子来熟悉与理解概念;(4)复习多项式、行列式、齐次线性方程组、向量的坐标等有关内容,为计算打好基础;(5)线性变换σ在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵是$A$,弄清$\sigma$与$A$的特征多项式、特征值与特征向量的关系;(6)提出一些简单的思考讨论题.

不变子空间是本章的一个难点,原因在于:(1)关于不变子空间的定义的引入,不容易说明,往往使人感到突然;(2)σ限制在其不变子空间W上,得到$\sigma|W$,对于$\sigma|W$与σ的联系与区别,不容易理解;(3)不变子空间又往往与一些较困难的概念,如直和、特征值与特征向量等,联系在一起.解决困难的方法是:(1)通过例子,如线性变换的值域与核,理解不变子空间的定义等;(2)通过后面研究线性变换的矩阵的化简,反过来认识不变子空间的意义;(3)复习线性变换的矩阵、直和等概念,为理解不变子空间概念作准备.

哈密尔顿-凯莱定理及其应用是本章的一个难点,原因在于:(1)哈密尔顿-凯莱定理的内容不易理解,并容易发生误解:因为$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|$,所以$f_A(A)=|AI-A|=0$;(2)哈密尔顿-凯莱定理的证明篇幅较长,而且用到伴随矩阵、矩阵多项式等概念,不容易掌握;(3)应用该定理将向量空间按特征值分解为不变子空间的直和,其证明较困难.解决困难的方法是:(1)复习行列式、伴随矩阵等概念;(2)掌握矩阵系数多项式的概念,并且,能够把以多项式为元素的矩阵写为矩阵系数的多项式;(3)指出$f_A(A)\neq|AI-A|$,左右两边的含义不同,但这一误解可能是激发人们发现该定理的一个因素;(4)复习直和的定义及判定方法,为证明按特征值分解为不变子空间的直和作准备,

并且,从整体上将证明分为几个部分,认真研读,一步一步地搞清楚.

6.3 例题解析

6.3.1 线性变换的判定及构作

1. 证明向量空间的变换是线性变换时,要按定义逐条逐点进行验证;证明不是线性变换时,仅需要通过具体向量指出定义中的某一点不成立就可以了.

例 1 证明: $M_n(F)$ 中的变换

$$\sigma:\sigma(X) = AX - XA, \forall X \in M_n(F).$$

是线性变换,其中 A 是 $M_n(F)$ 中一固定矩阵.

证明 σ 是 $M_n(F)$ 的变换,且对于 $X_1, X_2 \in M_n(F), k \in F$,有 $\sigma(X_1 + X_2) = A(X_1 + X_2) - (X_1 + X_2)A = (AX_1 - X_1A) + (AX_2 - X_2A) = \sigma(X_1) + \sigma(X_2), \sigma(kX_1) = A(kX_1) - (kX_1)A = k(AX_1 - X_1A) = k\sigma(X_1)$.

所以 σ 是线性变换.

例 2 证明: R^2 中的变换 σ:

$$\sigma((a,b)) = \begin{cases}(a,b), ab \geqslant 0\\(a,-b), ab < 0\end{cases}$$ 不是 R^2 的线性变换.

证明 对于 $(-2,-3),(-1,4) \in R^2, \sigma((-2,-3)+(-1,4)) = \sigma((-3,1)) = (-3,-1), \sigma((-2,-3)) + \sigma((-1,4)) = ((-2,-3)+(-1,-4) = (-3,-7), \sigma((-2,-3)+(-1,4)) \neq \sigma((-2,-3)) + \sigma((-1,4))$ 所以,σ 不是线性变换.

例 3 判别下面所定义的变换,哪些是线性的,哪些不是?

(1)在 F^3 中,$\sigma(a,b,c) = (a+1, a+b, c), \forall (a,b,c) \in F^3$;

(2)在 $F[t]$ 中,$\sigma(f(t)) = \int_0^t f(\tau)\sin\tau d\tau, \forall f(t) \in F[t]$.

解 (1)不是. 因为 $\sigma(0,0,0) = (1,0,0)$,可见 σ 将 F^3 的零向量变成了非零向量,故 σ 不是线性变换.

(2)是. 因为对任意 $f(t), g(t) \in F[t], k \in F$ 有

$$\sigma(f(t)+g(t))=\int_0^t(f(\tau)+g(\tau))\sin\tau\mathrm{d}\tau=\int_0^t f(\tau)\sin\tau\mathrm{d}\tau+\int_0^t g(\tau)\sin\tau\mathrm{d}\tau=$$

$$\sigma(f(t))+\sigma(g(t)),\sigma(kf(t))=\int_0^t(kf(\tau))\sin\tau\mathrm{d}\tau=k\int_0^t f(\tau)\sin\tau\mathrm{d}\tau=k\sigma(f(t)).$$

2. 构作线性变换时要根据线性变换的定义及已知的性质

例4　设 $\sigma\in L(V_n)$. 证明：$\dim\mathrm{Im}(\sigma)=\dim\mathrm{Im}(\sigma^2)$ 一个充要条件是必存在 V 的一个可逆线性变换 τ，使 $\sigma^2=\tau\sigma$.

证明　先证必要性. 设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 为 V_n 的一个基，则 $V=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$. 令 $\dim\mathrm{Im}(\sigma)=\dim\mathrm{Im}(\sigma^2)=r$，于是

$$\mathrm{Im}(\sigma)=\sigma(V)=L(\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_n)).$$

为方便起见，不妨令 $\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_r)$ 线性无关，这样 $\mathrm{Im}(\sigma)=L(\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_r))$.

由于

$$\mathrm{Im}(\sigma^2)=\sigma^2(V)=L(\sigma^2(\alpha_1),\cdots,\sigma^2(\alpha_r))\subseteq\mathrm{Im}(\sigma).$$

且 $\dim\mathrm{Im}(\sigma^2)=\dim\mathrm{Im}(\sigma)$，必有 $\mathrm{Im}(\sigma^2)\subseteq\mathrm{Im}(\sigma)$，因此，$\sigma^2(\alpha_1),\cdots,\sigma^2(\alpha_r)$ 线性无关.

对此分别对两组线性无关的向量 $\{\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_r)\}$，$\{\sigma^2(\alpha_1),\cdots,\sigma^2(\alpha_r)\}$ 扩充为 V 的两个基：

(1) $\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_r),\beta_{r+1},\cdots,\beta_n$；(2) $\sigma^2(\alpha_1),\cdots,\sigma^2(\alpha_r),\gamma_{r+1},\cdots,\gamma_n$. 于是由这两个基向量确定了一个线性变换 τ，使

$$\tau(\sigma(\alpha_i))=\sigma^2(\alpha_i),i=1,\cdots,r;$$

$$\tau(\beta_j)=\gamma_j,j=r+1,\cdots,n.$$

由此定义，便知 τ 是可逆的.

同时，$\tau\sigma=\sigma^2$，这是因为，对基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n\}$ 显然有

$$\tau\sigma(\alpha_i)=\sigma^2(\alpha_i),i=1,\cdots,r.$$

而

$$\tau\sigma(\alpha_j)=\sigma^2(\alpha_j),j=r+1,\cdots,n$$

亦成立. 事实上，$\sigma(\alpha_j)\in\mathrm{Im}(\sigma)=L(\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_r))$，因此 $\sigma(\alpha_j)=\sum_{i=1}^{r}k_i\sigma(\alpha_i)$，于是

$\tau\sigma(\alpha_j)=\tau(\sum_{i=1}^{r}k_i\sigma(\alpha_i))=\sum_{i=1}^{r}k_i\tau\sigma(\alpha_i)=\sum_{i=1}^{r}k_i\sigma^2(\alpha_i)=\sigma(\sum_{i=1}^{r}k_i\sigma(\alpha_i))=$ $\sigma\sigma(\alpha_j)=\sigma^2(\alpha_j)$，故 τ 即为所求.

再证充分性. 由于 τ 是可逆的线性变换，所以，对 V 中任意一子空间 W，都有

$$\dim W=\dim\tau(W).$$

其中 $\tau(W)=\{\tau(\xi)\mid\xi\in W\}$. 因此有

$$\dim\mathrm{Im}(\sigma)=\dim\tau(\mathrm{Im}(\sigma))=\dim\tau(\sigma(V))=\dim\sigma^2(V)=\dim\mathrm{Im}(\sigma^2).$$

6.3.2 线性变换的矩阵

1. 线性变换在指定基下的矩阵

这类问题大体上可以分为三种类型：(1) $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 用 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性表出，而后由定义直接写出；(2) 用过渡矩阵 X 及相似关系 $X^{-1}AX$；(3)引入第三组基，使所给的两组基均与其发生关系.

例 5 在 $M_2(F)$ 中定义线性变换 σ：

$$\sigma(X)=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}.$$

试求 σ 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵.

解 因为

$$\sigma(E_{11})=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&0\\c&0\end{pmatrix}=aE_{11}+cE_{21},$$

$$\sigma(E_{12})=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&a\\0&c\end{pmatrix}=aE_{12}+cE_{22},$$

$$\sigma(E_{21})=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b&0\\d&0\end{pmatrix}=bE_{11}+dE_{21},$$

$$\sigma(E_{22})=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&b\\0&d\end{pmatrix}=bE_{12}+dE_{22}.$$

所以，σ 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix}a&0&b&0\\0&a&0&b\\c&0&d&0\\0&c&0&d\end{pmatrix}.$$

例6　已知 F^3 中的线性变换 σ 在基 $\eta_1=(-1,1,1)$，$\eta_2=(1,0,-1)$，$\eta_3=(0,1,1)$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}.$$

试求 σ 在基 $\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$ 下的矩阵.

解　因为

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix},$$

所以 η_1,η_2,η_3 到 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 的过渡矩阵是$\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}$. 因此，$\sigma$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵是

$$\left(\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}\right)^{-1}\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\1&-1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1&-2\\2&2&0\\3&0&2\end{pmatrix}.$$

例7　设 σ 是 F^3 的线性变换，$\alpha_1=(-1,0,-2)$，$\alpha_2=(0,1,2)$，$\alpha_3=(1,2,5)$ 是 F^3 的一组基，且 $\sigma(\alpha_1)=(2,0,-1)$，$\sigma(\alpha_2)=(0,0,1)$，$\sigma(\alpha_3)=(0,1,2)$，试求 σ 在基 $\beta_1=(-1,1,0)$，$\beta_2=(1,0,1)$，$\beta_3=(0,1,2)$ 下的矩阵.

解　取基 $\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$，则$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$，$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)B$，$\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)C$，其中

$$A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&1&2\\-2&2&5\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\-1&1&2\end{pmatrix}.$$

从而 $\sigma(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A=\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)B^{-1}A$

$$=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)CB^{-1}A=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)A^{-1}CB^{-1}A.$$

因此，σ 在基 β_1,β_2,β_3 下的矩阵是

$$A^{-1}CB^{-1}A=\begin{pmatrix}2&2&-1\\4&2&-1\\-2&-1&1\end{pmatrix}.$$

2. 线性变换的和、乘积及逆，在某组基下的矩阵

要求线性变换的和在某基下的矩阵，先分别求出所给线性变换在某基下的矩阵，然后求出矩阵之和即可. 同理可得乘积、逆在某基下的矩阵.

例 8 设 σ,τ 为 $F^{2\times2}$ 上线性变换，

$$\sigma\begin{pmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix},\tau\begin{pmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1a_1&0\\0&r_2b_2\end{pmatrix}.$$

其中 $a_i,b_i,r_i\in F,i=1,2$，求 $\sigma+\tau,\sigma\tau$ 在 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵.

解 先分别求 σ,τ 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵.

$$\sigma\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=E_{11}+E_{12};$$

$$\sigma\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}=E_{11}-E_{12};$$

$$\sigma\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}=E_{21}+E_{22};$$

$$\sigma\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&-1\end{pmatrix}=E_{21}-E_{22}.$$

所以 σ 在 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}.$$

又

$$\tau\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1&0\\0&0\end{pmatrix}=r_1E_{11},\tau\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0,$$

$$\tau\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=0,\tau\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&r_2\end{pmatrix}=r_2E_{22}.$$

所以 τ 在 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_2 \end{pmatrix}.$$

从而 $\sigma+\tau$ 在 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵为

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+r_1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & r_2-1 \end{pmatrix},$$

$\sigma\tau$ 在 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵为

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & 0 \\ r_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_2 \\ 0 & 0 & 0 & -r_2 \end{pmatrix}.$$

3. 线性变换的矩阵应用

(1)求线性变换 σ 的迹

n 阶矩阵 $A=(a_{ij})nn$ 的迹,定义为主对角线上元素的和,记为 TrA,

$TrA=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$. 可以证明,相似的矩阵有相同的迹,于是可把线性变换 σ 的迹说成它的任何一个矩阵表示的迹. 由此,要求所给线性变换 σ 的迹,只需求出 σ 在一组基下的矩阵.

例 9　求 R^3 上的线性变换 σ 的迹,其中

$$\sigma(x,y,z)=(a_1x+a_2y+a_3z,b_1x+b_2y+b_3z,c_1x+c_2y+c_3z).$$

解　先求出 σ 的矩阵表示,在 R^3 中选两基 $\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$,则 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

所以 σ 的迹为 $TrA=a_1+b_2+c_3$.

(2)已知矩阵,求线性变换.

求给定基下的矩阵的线性变换,只需对任意$\xi \in V$,求出$\sigma\xi$由给定基的表达式,则σ即为所求.

6.3.3　线性变换的特征值与特征向量

1. 线性变换的特征值与特征向量

(1)用定义求线性变换的特征值与特征向量.

按定义求线性变换σ的特征值与特征向量的一般步骤为:

①在向量空间V中取一组基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,写出$\sigma$在这组基下的矩阵$A$;

②求出A的特征多项式$|xI-A|$在数域F中全部根,它们就是线性变换σ的全部特征值;

③把所求的不同特征值逐个代入齐次线性方程组

$$(\lambda I-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=0 \qquad (*)$$

对于每一个特征值λ_i,解方程组$(\lambda_i I-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=0$,求其基础解系,就可得出一组属于$\lambda_i$的线性无关的特征向量,从而求得$\sigma$的全部特征向量.

例10　设σ为三维实向量空间上的一个线性变换,且在基$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$下的矩阵为$A=\begin{pmatrix}2&-1&2\\5&-3&3\\-1&0&-2\end{pmatrix}$,求$\sigma$的特征值与特征向量.

解　A的特征多项式为$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-2\\-5&\lambda+3&-3\\1&0&\lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3$,于是$A$的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=-1$.

把 $\lambda=-1$ 代入方程组(*)得 $\begin{pmatrix}-3&1&-2\\-5&2&-3\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$. 求得一个基础解系为 $\eta=\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3$,因此属于 -1 的全部特征向量为 $k\eta$(k 为任意非零实数).

例 11　设 σ 是复数域上的四维向量空间 V 的一个线性变换,且在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix},$$

求 σ 的特征值与特征向量.

解　A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&-1&-1\\-1&\lambda-1&1&1\\-1&1&\lambda-1&1\\-1&1&1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^3(\lambda+2).$$

得到 σ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2,\lambda_4=-2$

解方程组 $(2I-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$,得 $x_1=x_2+x_3+x_4$,所以基础解系为

$$\eta_1=(1,1,0,0),\eta_2=(1,0,1,0),\eta_3=(1,0,0,1).$$

故 σ 的对应于特征值 2 的一切特征值向量为:

$$k_1\eta_1+k_2\eta_2+k_3\eta_3=k_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+k_2(\varepsilon_1+\varepsilon_3)+k_3(\varepsilon_1+\varepsilon_4).$$

其中 k_1,k_2,k_3 为不全是零的复数.

解方程组

$$(-2I-A)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0,得\begin{cases}x_1=-x_4\\x_2=x_4\\x_3=x_4\end{cases}.$$

所以基础解系为 $\eta = (-1,1,1,1)$，故 σ 的对应于特征值 -2 的一切特征值向量为 $k\eta = k(-\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4), k \neq 0$.

(2)利用行列式的方法与技巧，求线性变换的特征值.

求线性变换的特征值，主要在于将特征多项式 $f(\lambda) = |\lambda I - A|$ 计算出来，而 $|\lambda I - A|$ 是一个行列式，所以在求特征值时，可以充分利用行列式的计算方法与技巧. 特别是求阶数较高的矩阵的特征值时更需要如此.

例 12 设 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)'$，$\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)'$，且 $a_1 b_1 \neq 0$，$\alpha'\beta = 0$. 设 $A = \alpha\beta$，求 A 的特征值.

解 $$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a_1b_1 - \lambda & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 - \lambda & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n - \lambda \end{vmatrix} \underline{\text{升级}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ 0 & a_1b_1 - \lambda & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ 0 & a_2b_1 & a_2b_2 - \lambda & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ -a_1 & -\lambda & & & \\ -a_2 & & -\lambda & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ -a_n & & & & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 - \dfrac{\alpha'\beta}{\lambda} & b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ & -\lambda & & & \\ & & -\lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -\lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n.$$

于是 A 的特征值为 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$.

(3)利用相似性求特征值

由于同一个线性变换在不同基下的矩阵是相似的，而相似的矩阵有相同的特征多项式，进而有相同的特征值，这样，可利用相似性，当两个矩阵相似时，取一个比较简单的矩阵(含零多的矩阵)来求其特征值.

例 13 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是四维向量空间 V 的一组基，线性变换 σ 在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}5 & -2 & -4 & 3\\ 3 & -1 & -3 & 2\\ -3 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2}\\ -10 & 3 & 11 & -7\end{pmatrix}.$$

①求 σ 在基 $\begin{cases}\eta_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4\\ \eta_2=2\varepsilon_1+3\varepsilon_2+\varepsilon_3\\ \eta_3=\varepsilon_3\\ \eta_4=\varepsilon_4\end{cases}$ 下的矩阵；

②求 σ 的特征值.

解　① σ 在 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的矩阵为

$$B=T^{-1}AT=\begin{pmatrix}0 & 0 & 6 & -5\\ 0 & 0 & -5 & 4\\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 5 & -2\end{pmatrix}.$$

② σ 的特征多项式为：

$$|\lambda I-B|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -6 & 5\\ 0 & \lambda & 5 & -4\\ 0 & 0 & \lambda-\frac{7}{2} & \frac{3}{2}\\ 0 & 0 & -5 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{2}).$$

故 σ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=0,\lambda_3=1,\lambda_4=\frac{1}{2}$.

2. 特征值、特征向量的应用

运用方阵的特征值、特征向量的方法是解决线性变换和矩阵以及行列式中一些问题的方法之一，它主要是用方阵的相似作过渡或应用“相似矩阵有相同的特征值”这个结论以及与特征值有关的一些等式（不等式）将所讨论的问题化简，从而使问题得到解决.

(1)矩阵的对角化

先求出特征值与特征向量，根据所得到的线性无关的特征向量的

个数确定可否对角化. 而在可以对角化时，以计算过程中所得的基础解系的向量为列，作成过渡矩阵，但要注意列与特征值的对应关系.

例 14　判断下面矩阵 A 能否与对角阵相似?若能，求出满足 $B = T^{-1}AT$ 是对角阵的 T.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}.$$

解　先求 A 的特征值

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -2 & 1 \\ 2 & \lambda + 2 & -2 \\ -3 & -6 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 4).$$

故 A 的 特征值为 $2,2,-4$.

再求 A 的特征向量.

当 $\lambda = 2$ 时，解齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

求得一个基础解系 $\{(-2,1,0),(1,0,1)\}$.

当 $\lambda = -4$ 时，解齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix} -7 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0,$$

求得一个基础解系 $\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right)$.

由于基础解系所含向量的个数都等于对应的特征值的重数，所以 A 可以对角化. 取 $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -2 & 1 \\ -\frac{2}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，则 $T^{-1}AT = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

例 15　设 A 是一 n 阶下三角矩阵，证明：

①如果 $a_{ii} \neq a_{jj}(i,j = 1,2,\cdots,n)$，那么 A 相似于一对角矩阵；

②若 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$，而至少有一 $a_{i_0j_0} \neq 0(i_0 > j_0)$，那么 A 不与对角阵相似.

证明　①因为 A 为下三角阵，所以

$$f(\lambda) = |\lambda I - A| = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})\cdots(\lambda - a_{nn}).$$

又 $a_{ii} \neq a_{jj}(i \neq j),(i,j = 1,2,\cdots,n)$，故 A 有 n 个不同的特征值，因而矩阵 A 所对应的线性变换 σ 在某组基下的矩阵是对角阵，故矩阵 A 相似于对角阵.

②假设 A 与对角阵 $B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ 相似，则它们有相同的特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，又因为 A 的特征多项式 $f(\lambda) = (\lambda - a_{11})^n$，所以有 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = a_{11}$. 由于 $B = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{11} \end{pmatrix} = a_{11}I$ 且存在可逆阵 T，使 $A = T^{-1}BT = T^{-1}a_{11}IT = a_{11}T^{-1}IT = a_{11}I = B$，这与 A 至少有一个 $a_{i_0j_0} \neq 0$ 矛盾，故 A 不可能与对角阵相似.

(2)求方阵的幂

当一个矩阵 A 能与对角阵相似时，即 $B = T^{-1}AT$，则有 $B^n = (T^{-1}AT)^n = T^{-1}A^nT$，从而 $A^n = TB^nT^{-1}$，这样可求出 A 的 n 次幂.

例 16　设 $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，求 $|A|^{2k}$ 及 A^{2k}(k 为正整数).

解　令 $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$，$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$，$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$|\lambda I - A_1| = \lambda^2 - 25 = (\lambda - 5)(\lambda + 5)$，所以 $\lambda_1 = 5,\lambda_2 = -5$ 且相应

特征向量为(2,1),(1, -2),那么令 $T=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$可得 $T^{-1}A_1T=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -5\end{pmatrix}$,所以$T^{-1}A_1^{2k}T=\begin{pmatrix}5^{2k} & 0\\ 0 & 5^{2k}\end{pmatrix}=5^{2k}I_2$,从而$A_1^{2k}=T5^{2k}I_2T^{-1}=5^{2k}I_2$.

其次 $A_2=2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,所以 $A_2^{2k}=2k\begin{pmatrix}1 & 4k\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, 即有

$$A^{2k}=\begin{pmatrix}5^{2k} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5^{2k} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2^{2k} & k2^{2k+2}\\ 0 & 0 & 0 & 2^{2k}\end{pmatrix}, |A|^{2k}=10^{4k}.$$

3. 特征多项式,哈密尔顿-凯莱定理的应用

(1)求特殊方阵的幂

例 17　设 $A=\begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & \omega & c\\ 0 & 0 & \omega^2\end{pmatrix}$

其中 a,b,c 是任意数,$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{-3}}{2}$,求 A^{100} 及 A^{-1}.

解　A 的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -b\\ 0 & \lambda-\omega & -c\\ 0 & 0 & \lambda-\omega^2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-\omega)(\lambda-\omega^2)=\lambda^3-1$$

由哈密尔顿-凯莱定理知,$A^3-I=0$ 即 $A^3=I$. 故 $A\cdot A^2=I$,从而 $A^{-1}=A^2$,所以 $A^{100}=(A^3)^{33}\cdot A=A$.

(2)将某矩阵表为矩阵 A 的多项式

例 18　设 n 阶矩阵 A 是可逆的,证明 A 的逆矩阵 A^{-1} 与伴随矩阵 A^* 都可表为 A 的多项式.

证明　设 A 的特征多项式

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n.$$

因为 A 可逆,所以常数项 $a_n=(-1)^n|A|\neq 0$,由哈密尔顿-凯莱定

理知

$$f(A)=A^n+a_1A^{n-1}+\cdots+a_{n-1}A+a_nI=0.$$

于是 $-\frac{1}{a_n}(A^{n-1}+a_1A^{n-2}+\cdots+a_{n-1}I)A=I$,因此得 $A^{-1}=-\frac{1}{a_n}(A^{n-1}+a_1A^{n-2}+\cdots+a_{n-1}I)$;又由 $AA^*=|A|I$ 得 $A^*=|A|A^{-1}=(-1)^{n+1}(A^{n-1}+a_1A^{n-2}+\cdots+a_{n-1}I)$.

6.3.4 不变子空间

1. 当 W 是线性包时,只须证生成元的象均在 W 中即可证明 W 是 σ - 子空间.

例 19 证明:由线性变换 σ 的特征向量所组成的任意一集合生成的子空间是 σ - 子空间.

证明 设 $W=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)$,$\alpha_i$ 是 σ 的特征向量且 $\sigma\alpha_i=\lambda_i\alpha_i,i=1,2,\cdots,s$,因为 $\sigma\alpha_i=\lambda_i\alpha_i\in W,i=1,2,\cdots,s$,所以 W 是 σ - 子空间.

2. 当 W 不便表成线性包时,可严格按定义证

例 20 设 W 是 σ - 子空间,$f(x)\in F[x]$,证明 W 也是 $f(\sigma)$ - 子空间

证明 先用数学归纳法证明 $\sigma^k\alpha\in W$.

$\forall\alpha\in W$,当 $k=1$ 时,因为 W 是 σ - 子空间,所以 $\sigma\alpha\in W$,结论成立.

设 $k>1$,并且结论对于 $k-1$ 成立. 因为 $\sigma^k\alpha=\sigma(\sigma^{k-1}\alpha)$,由归纳假设 $\sigma^{k-1}\alpha\in W$,又知 W 是 σ - 子空间,所以,$\sigma^k\alpha\in W$,结论也成立. 故对任意自然数 n,结论都成立. 令 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$,则 $f(\sigma)=a_n\sigma^n+\cdots+a_1\sigma+a_0$,于是 $f(\sigma)\alpha=a_n\sigma^n\alpha+\cdots+a_1\sigma\alpha+a_0\alpha$. 因为 W 是子空间,又 $\sigma^k\alpha\in W$,所以 $a_i\sigma^i\alpha+a_k\sigma^k\alpha\in W$. 从而 $f(\sigma)\alpha\in W$. 所以 W 是 $f(\sigma)$ - 子空间.

例 21 设 $V=V_1\oplus V_2,\sigma,\tau\in L(V)$,$\forall\alpha=\alpha_1+\alpha_2\in V(\alpha_i\in V_i,i=1,2)$ 都有 $\sigma(\alpha)=\alpha_1$,证明:V_1 与 V_2 都是 τ 的不变子空间的充要条件是 $\sigma\tau=\tau\sigma$.

证明 必要性. $\forall\alpha=\alpha_1+\alpha_2\in V,\alpha_i\in V_i,i=1,2$,则 $\tau(\alpha)=\tau(\alpha_1)+\tau(\alpha_2)\in V=V_1\oplus V_2$. 进而 $\sigma(\tau(\alpha))=\tau(\alpha_1)$,$\tau(\sigma(\alpha))=$

$\tau(\alpha_1)$,故 $\sigma\tau(\alpha) = \tau\sigma(\alpha)$,即 $\sigma\tau = \tau\sigma$.

充分性. $\forall \alpha \in V_1$,则有 $\sigma(\alpha) = \alpha$,进而 $\sigma(\tau(\alpha)) = \tau(\sigma(\alpha)) = \tau(\alpha)$. 令 $\tau(\alpha) = \beta_1 + \beta_2 \in V, \beta_i \in V_i, i = 1,2$, 于是有

$$\tau(\alpha) = \sigma(\tau(\alpha)) = \sigma(\beta_1 + \beta_2) = \beta_1 \in V_1.$$

即 $\tau(V_1) \subseteq V_1$,故 V_1 是 τ 的不变子空间.

同理, $\forall \alpha \in V_2, \sigma(\alpha) = 0$,进而 $\sigma(\tau(\alpha)) = \tau(\sigma(\alpha)) = \tau(0) = 0$. 令 $\tau(\alpha) = \beta_1 + \beta_2 \in V, \beta_i \in V_i, i = 1,2$,于是有

$$\sigma(\tau(\alpha)) = \sigma(\beta_1 + \beta_2) = \beta_1,$$

由此得 $\beta_1 = 0$,因此 $\tau(\alpha) = \beta_2 \in V_2$,即 $\tau(V_2) \subseteq V_2$,故 V_2 也是 τ 的不变子空间.

6.3.5 线性变换的值域与核

1. 设 n 维向量空间 V 的线性变换 σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 下的矩阵是 A, A 的秩为 r. 求出 A 的列向量组 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 的一极大无关组 $\eta_{i_1}, \eta_{i_2}, \cdots, \eta_{i_r}$,则得到 $\sigma(V) = L(\sigma(\varepsilon_{i_1}), \sigma(\varepsilon_{i_2}), \cdots, \sigma(\varepsilon_{i_r}))$. 求出 $AX = 0$ 的一基础解系,以它们为坐标的向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n-r}$,则得到 $\sigma^{-1}(0) = L(\alpha_1, \cdots, \alpha_{n-r})$. 有时,利用关系式 σ 的秩 $+ \sigma$ 的零度 $= n$ 来简化计算.

例22 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是4维向量空间 V 的一组基. 已知 V 的线性变换 σ 在该组基下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

试求 σ 的值域与核.

解 在 σ 的核 $\sigma^{-1}(0)$ 中任取一向量 $\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + x_3\varepsilon_3 + x_4\varepsilon_4$,则由 $\sigma(\alpha) = 0$ 得

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

求得一基础解系为$(-4,-3,2,0)$,$(-1,-2,0,1)$,从而,$\alpha_1=-4\varepsilon_1-3\varepsilon_2+2\varepsilon_3$,$\alpha_2=-\varepsilon_1-2\varepsilon_2+\varepsilon_4$是$\sigma^{-1}(0)$的一组基,因此,$\sigma^{-1}(0)=L(\alpha_1,\alpha_2)$.

由于σ的零度是2,所以σ的秩为2,即A的秩为2. 而A的前两列线性无关,所以$\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2)$是$\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\sigma(\varepsilon_3),\sigma(\varepsilon_4)$的一个极大无关组,因此$\sigma(V)=L(\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2))$.

例23　已知R^3的线性变换

$$\sigma(a,b,c)=(a+2b-c,b+c,a+b-2c)$$

求$\sigma\mathrm{R}^3$与$\sigma^{-1}(0)$的基与维数.

解　取R^3的基$e_1=(1,0,0)$,$e_2=(0,1,0)$,$e_3=(0,0,1)$ σ在基e_1,e_2,e_3下矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&2&-1\\0&1&1\\1&1&-2\end{pmatrix}.$$

可求得$\mathrm{rank}A=2$且$(1,0,1)'$,$(2,1,1)'$是A的列向量组的极大线性无关组,故$\dim\sigma\mathrm{R}^3=2$,且$\sigma(e_1),\sigma(e_2)$是$\sigma\mathrm{R}^3$的一组基.

求解$Ax=0$得基础解系$(3,-1,1)'$,故$\dim\sigma^{-1}(0)=1$,且$3e_1-e_2+e_3$是$\sigma^{-1}(0)$的基.

2. 求象空间$\sigma(V)$时,也可寻求基的象的极大无关组.

例24　同例22.

解　因为$\sigma(e_1)=(1,0,1)$,$\sigma(e_2)=(2,1,1)$,$\sigma(e_3)=(-1,1,-2)$,可得该向量组的秩为2,且$(1,0,1)$,$(2,1,1)$是一个极大无关组,故$\dim\sigma\mathrm{R}^3=2$且$\sigma(e_1),\sigma(e_2)$是$\sigma\mathrm{R}^3$的一组基.

设$(a,b,c)\in\sigma^{-1}(0)$,则由$\sigma(a,b,c)=(a+2b-c,b+c,a+b-2c)=(0,0,0)$得

$$\begin{cases}a+2b-c=0\\b+c=0\\a+b-2c=0.\end{cases}$$

可求得该方程组的通解为$a=3k,b=-k,c=k$(k任意),所以$(a,b,c)=$

$k(3,-1,1)$(k 任意),故 $\dim\sigma^{-1}(0)=1$,且$(3,-1,1)$ 是 $\sigma^{-1}(0)$ 的基.

6.4　练习题及答案

6.4.1　练习题

1. 判别下面所定义的变换,哪些是线性的,哪些不是?

(1)在向量空间 V 中,$\sigma\xi=\xi+\alpha$,其中 $\alpha\in V$ 是一个固定的向量;

(2)在向量空间 V 中,$\sigma\xi=\alpha$,其中 $\alpha\in V$ 是一个固定的向量;

(3)在 F^3 中,$\sigma(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,x_2+x_3,x_3^2)$;

(4)在 F^3 中,$\sigma(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$;

(5)在 $F[x]$ 中,$\sigma(f(x))=f(x+1)$;

(6)在 $F[x]$ 中,$\sigma(f(x))=f(x_0)$,其中 $x_0\in F$ 是一个固定的数.

2. 设 V_1,V_2 是 $V_n(F)$ 的两个子空间,且 $\dim V_1+\dim V_2=\dim V=n$. 试证:必存在一个线性变换 σ,使 $\mathrm{Im}(\sigma)=V_2,\ker(\sigma)=V_1$.

3. 设 σ 在 R^3 上的线性变换,σ 定义为 $\sigma(x,y,z)=(2y+z,x-4y,3x)$,求 σ 在基 $e_1=(1,1,1),e_2=(1,1,0),e_3=(1,0,0)$ 下的矩阵.

4. 给定 F^3 的两组基:

$$\varepsilon_1=(1,0,1),\varepsilon_2=(2,1,0),\varepsilon_3=(1,1,1).$$

$$\eta_1=(1,2,-1),\eta_2=(2,2,-1),\eta_3=(2,-1,-1).$$

设 σ 为 F^3 的线性变换,且 $\sigma\varepsilon_i=\eta_i,i=1,2,3$.

(1)写出由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵;

(2)写出 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵;

(3)写出 σ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵.

5. 已知 $F[t]_3$ 的两组基

(1):$f_1(t)=1+2t^2,f_2(t)=t+2t^2,f_3(t)=1+2t+5t^2$.

(2):$g_1(t)=1-t,g_2(t)=1+t^2,g_3(t)=t+2t^2$.

又 $F[t]_3$ 的线性变换 σ 满足

$$\sigma(f_1(t))=2+t^2,\sigma(f_2(t))=t,\sigma(f_3(t))=1+t+t^2.$$

求 σ 在基(2)下的矩阵.

6. 已知 $F^{2\times2}$ 的两个线性变换：

$$\sigma(X) = XN, \tau(X) = MX.$$

$$(\forall X \in F^{2\times2}, M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}).$$

(1)求 $\sigma+\tau$, $\sigma\tau$ 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵；

(2) σ 与 τ 是否可逆？若可逆，求其逆变换.

7. 设 $F^{2\times2} = V, X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$，且设 σ 是由 $\sigma(A) = XA$ 定义的 V 上的线性变换，求 σ 的迹.

8. 设 σ 是复数域C上的三维向量空间 V 的线性变换，σ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，试求 σ 的特征值与特征向量.

9. 求矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量.

10. 设 σ 为复数域 C 上三维向量空间 V 的线性变换，σ 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$，试问，是否有 V 的一组基，使 σ 在该组基下的矩阵为对角形？若有，试求出该基及对角形.

11. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$，求 A^k.

12. 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，证明，当 $n \geqslant 3$ 时，有 $A^n = A^{n-2} + A^2 - I$.

13. 设 σ 为 n 维复向量空间 V 的线性变换，W 有任意一非零 σ - 子空间，则 W 必含有一维 σ - 子空间.

14. 设 3 维向量空间 V 的线性变换 σ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

求证：$W = L(-\alpha_1 + \alpha_2, -\alpha_1 + \alpha_3)$ 是 σ 的不变子空间.

15. 已知 $F^{2\times 2}$ 的线性变换

$$\sigma(X) = MX - XM(\forall X \in F^{2\times 2}, M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}).$$

求 $\sigma(F^{2\times 2})$ 与 $\sigma^{-1}(0)$ 的基与维数.

16. 已知 $F[t]_4$ 的线性变换

$$\sigma(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3)$$
$$= (a_0 - a_2) + (a_1 - a_3)t + (a_2 - a_0)t^2 + (a_3 - a_1)t^3.$$

求 $\sigma(F[t]_4)$ 与 $\sigma^{-1}(0)$ 的基与维数.

17. 已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ 相似，求 a 和 b.

18. $\sigma \in L(V_n)$，W 为 V_n 的一个子空间. 证明：$\dim\sigma(W) + \dim(\mathrm{Ker}(\sigma) \cap W) = \dim W$.

19. 设 V 是复数域上的 n 维向量空间，σ, τ 是 V 的线性变换，且 $\sigma\tau = \tau\sigma$.

证明：(1) 如果 λ_0 是 σ 的一个特征值，那么 V_{λ_0} 是 τ 的不变子空间；

(2) σ, τ 至少有一个公共的特征向量.

20. 设 σ 为复数域 C 上 n 维向量空间 V 的线性变换，证明下述条件等价：

(1) σ 是幂零变换，即存在一个自然数 k，使 $\sigma^k = 0$；

(2) σ 的特征值皆为零；

(3) σ 的矩阵相似于主对角线元素皆为零的上三角阵

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix};$$

(4) σ 的特征多项式 $f_\sigma(\lambda) = \lambda^n$.

6.4.2　练习题答案

1.(1) $\sigma(\xi)=\xi+\alpha,\sigma(\eta)=\eta+\alpha$

$$\sigma(\xi+\eta)=\xi+\eta+\alpha,\sigma(k\xi)=k\xi+\alpha$$

若 $\sigma(\xi)+\sigma(\eta)=\sigma(\xi+\eta)$,则有 $\alpha=0$,同时 $k\sigma(\xi)=\sigma(k\xi)$. 故当 $\alpha=0$ 时,σ 是线性变换;$\alpha\neq0$ 时,σ 不是线性变换.

(2)同上题,若 $\sigma(\xi)+\sigma(\eta)=\sigma(\xi+\eta)$,则有 $\alpha=0$,同时 $k\sigma(\xi)=\sigma(k\xi)$,故当 $\alpha=0$ 时,σ 是线性变换,$\alpha\neq0$ 时,σ 不是线性变换.

(3)不是. 例如当 $\xi=(1,0,0)$,$k=2$ 时,$k\sigma(\xi)=(2,0,0)$,而 $\sigma(k\xi)=(4,0,0)$,可见 $\sigma(k\xi)\neq k\sigma(\xi)$.

(4)是. 取 $\xi=(x_1,x_2,x_3)$,$\eta=(y_1,y_2,y_3)$,则

$$\sigma(\xi+\eta)=\sigma(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)$$
$$=(2x_1+2y_1-x_2-y_2,x_2+y_2+x_3+y_3,x_1+y_1)$$
$$=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)+(2y_1-y_2,y_2+y_3,y_1)=\sigma(\xi)+\sigma(\eta).$$
$$\sigma(k\xi)=\sigma(kx_1,kx_2,kx_3)=(2kx_1-kx_2,kx_2+kx_3,kx_1)$$
$$=k(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)=k\sigma\xi.$$

(5)是. 任取 $f(x)\in F[x]$,$g(x)\in F[x]$. 令 $u(x)=f(x)+g(x)$,则

$$\sigma(f(x)+g(x))=\sigma(u(x))=u(x+1)$$
$$=f(x+1)+g(x+1)=\sigma(f(x))+\sigma(g(x)).$$

再令 $u(x)=kf(x)$,则 $\sigma(kf(x))=\sigma(v(x))=v(x+1)=kf(x+1)$ $=k\sigma(f(x))$.

(6)是. 任取 $f(x)\in F[x]$,$g(x)\in F[x]$,有

$$\sigma(f(x)+g(x))=f(x_0)+g(x_0)=\sigma(f(x))+\sigma(g(x)).$$
$$\sigma(kf(x))=kf(x_0)=k\sigma(f(x)).$$

2. 令 $\dim V_1=r$,则 $\dim V_2=n-r$,于是设

$$V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r),V_2=L(\beta_{r+1},\cdots,\beta_n),$$

其中 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 线性无关,$\beta_{r+1},\cdots,\beta_n$ 也线性无关. 由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 扩充为 V 的一基:

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n.$$

对 V 中 n 个向量:

$$0,\cdots,0,\beta_{r+1},\cdots,\beta_n,$$

则必有一个线性变换 σ，使

$$\sigma(\alpha_i)=\begin{cases}0, i=1,\cdots,r;\\ \beta_i, i=r+1,\cdots,n.\end{cases}$$

下证 $V_2=\mathrm{Im}(\sigma)$，$V_1=\mathrm{Ker}(\sigma)$.

事实上，$\mathrm{Im}(\sigma)=\sigma(L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n))=L(\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_r),\sigma(\alpha_{r+1}),\cdots,\sigma(\alpha_n))=L(\beta_{r+1},\cdots,\beta_n)=V_2$. 又 $\forall\alpha\in V_1=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$，则 $\alpha=\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i$，于是 $\sigma(\alpha)=\sigma(\sum_{i=1}^{r}k_i\alpha_i)=\sum_{i=1}^{r}k_i\sigma(\alpha_i)=0$，即得 $\alpha\in\mathrm{Ker}(\sigma)$，进而 $V_1\subseteq\mathrm{Ker}(\sigma)$，则

$$\dim\mathrm{Ker}(\sigma)=n-\dim\mathrm{Im}(\sigma)=n-(n-r)=r=\dim V_1,$$

因此 $\mathrm{Ker}(\sigma)=V_1$.

3. 先求 $\sigma e_1,\sigma e_2,\sigma e_3$. 由所给线性变换有

$$\sigma e_1=\sigma(1,1,1)=(3,-3,3)=3e_1-6e_2+6e_3,$$
$$\sigma e_2=\sigma(1,1,0)=(2,-3,3)=3e_1-6e_2+5e_3,$$
$$\sigma e_3=\sigma(1,0,0)=(0,1,3)=3e_1-2e_2-e_3.$$

所以 σ 在基 e_1,e_2,e_3 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}3&3&3\\-6&-6&-2\\6&5&-1\end{pmatrix}$.

4. (1)由过渡矩阵求法可得 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)T$，

于是 $T=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-4&-3&3\\2&3&3\\2&1&-5\end{pmatrix}$；

(2)由于 $\sigma\xi_i=\eta_i, i=1,2,3$，故由(1)可得

$$\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)T.$$

所以 σ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为 T；

(3)因为 $(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)T$，由(2)知 $\sigma(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)T$，故 σ 在 η_1,η_2,η_3 下的矩阵为 $T^{-1}TT=T$. 即 σ 在 η_1,η_2,η_3 下的矩阵为 T.

5. 取 $F[t]_3$ 的基 $1,t,t^2$，则有

$$(f_1,f_2,f_3)=(1,t,t^2)A;$$

$$(g_1,g_2,g_3) = (1,t,t^2)B;$$

$$\sigma(f_1,f_2,f_3) = (1,t,t^2)C;$$

其中 $A = \begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&2\\2&2&5\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\0&1&2\end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$.

于是 $(g_1,g_2,g_3) = (f_1,f_2,f_3)A^{-1}$. 利用以上关系得

$$\sigma(g_1,g_2,g_3) = \sigma((f_1,f_2,f_3)A^{-1}B) = \sigma(f_1,f_2,f_3)A^{-1}B$$

$$= (1,t,t^2)CA^{-1}B = (g_1,g_2,g_3)B^{-1}CA^{-1}B.$$

故 σ 在基(2)下的矩阵 D 为

$$D = B^{-1}CA^{-1}B = \begin{pmatrix}1&2&-2\\1&-1&2\\0&1&-1\end{pmatrix}.$$

6. (1)可求得 σ,τ 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵分别为

$$A = \begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&1&-1\end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-2&0&0&0\\0&-2&0&0\end{pmatrix}.$$

故 $\sigma+\tau$ 及 $\sigma\tau$ 在该基下的矩阵分别为

$$A+B = \begin{pmatrix}2&1&0&0\\1&0&0&0\\-2&0&1&1\\0&-2&1&-1\end{pmatrix}, AB = \begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&-1&0&0\\-2&-2&0&0\\-2&2&0&0\end{pmatrix}.$$

(2)由于 $|A| = 4$, $|B| = 0$,所以线性变换 σ 可逆,而 τ 不可逆. 可得 σ^{-1} 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵为

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\end{pmatrix}.$$

任取 $X=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\in F^{2\times 2}$，则

$$\sigma^{-1}(X)=\sigma^{-1}\left[(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\right]=(E_{11},E_{12},E_{21},E_{22})A^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}(x_1+x_2)E_{11}+\frac{1}{2}(x_1-x_2)E_{12}+\frac{1}{2}(x_3+x_4)E_{21}+\frac{1}{2}(x_3-x_4)E_{22}.$$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}x_1+x_2 & x_1-x_2\\ x_3+x_4 & x_3-x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=XN^{-1}.$$

7. 在 V 中取一组基为

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},E_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

则 $\sigma E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 0\end{pmatrix}=E_{11}+3E_{21},\sigma E_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}=E_{12}+3E_{22}$，

$$\sigma E_{21}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 4 & 0\end{pmatrix}=2E_{11}+4E_{21},\sigma E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}=2E_{12}+4E_{22},$$

所以 σ 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 3 & 0 & 4\end{pmatrix},$$

于是 $\mathrm{Tr}\sigma=\mathrm{Tr}A=1+1+4+4=10$.

8. σ 的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & -1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ -1 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1),$$

所以，σ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1$.

解方程组 $(I-A)X=0$，得 $x_1=x_3$，所以，一基础解系为(1,0,1)，

(0,1,0),从而 $\varepsilon_1+\varepsilon_3$ 与 ε_2 是 σ 的属于特征值1的线性无关的特征向量. 而属于1的一切特征向量是 $k_1(\varepsilon_1+\varepsilon_3)+k_2\varepsilon_2=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+k_1\varepsilon_3$,其中 k_1,k_2 为任意一组不全为零的复数.

解方程组 $(-I-A)X=0$,得 $x_1=-x_3,x_2=0$,所以,一基础解系为(1,0,-1),从而 σ 的属于特征值 -1 的一切特征向量是 $k(\varepsilon_1-\varepsilon_3)=k\varepsilon_1-k\varepsilon_3$,其中 k 为任意非零复数.

9. A 的特征多项式为 $|\lambda I-A|=(\lambda-2)^3(\lambda+2)$,所以 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2,\lambda_4=-2$.

解方程组 $(2I-A)X=0$,得 $x_1=x_2+x_3+x_4$,所以,一基础解系为 $\xi_1=(1,1,0,0),\xi_2=(1,0,1,0),\xi_3=(1,0,0,1)$,从而 A 的属于特征值2的一切特征向量是 $k_1\xi_1+k_2\xi_2+k_3\xi_3$,其中 k_1,k_2,k_3 为不全零的数.

解方程组 $(-2I-A)X=0$,得 $x_1=-x_4,x_2=x_3=x_4$,所以,一基础解系为 $\xi=(-1,1,1,1)$,从而 A 的属于特征值 -2 的一切特征向量是 $k\xi$,k 是不为零的数.

10. 先求 σ 的特征值及线性无关的特征向量.

σ 的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-5 & -6 & 3\\ 1 & \lambda & -1\\ -1 & -2 & \lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda-2),$$

所以,σ 的特征值为 $\lambda_1=2,\lambda_2=1+\sqrt{3},\lambda_3=1-\sqrt{3}$.

解方程组 $(2I-A)X=0$,得一基础解系为(-2,1,0),从而 $\eta_1=-2\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 是 σ 的属于特征值2的一个特征向量.

解方程组 $((1+\sqrt{3})I-A)X=0$,得一基础解系为$(3,-1,2-\sqrt{3})$,从而 $\eta_3=3\varepsilon_1-\varepsilon_2+(2-\sqrt{3})\varepsilon_3$ 是 σ 的属于特征值 $1+\sqrt{3}$ 的一个特征向量.

解方程组 $((1-\sqrt{3})I-A)X=0$,得一基础解系为$(3,-1,2+\sqrt{3})$,从而 $\eta_3=3\varepsilon_1-\varepsilon_2+(2+\sqrt{3})\varepsilon_3$ 是 σ 的属于特征值 $1-\sqrt{3}$ 的一个特征向量.

因此，σ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵是对角形 $\begin{pmatrix}2 & & \\ & 1+\sqrt{3} & \\ & & 1-\sqrt{3}\end{pmatrix}$，

基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 到基 η_1,η_2,η_3 的过渡矩阵是 $\begin{pmatrix}-2 & 3 & 3\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 2-\sqrt{3} & 2+\sqrt{3}\end{pmatrix}$.

11. $|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda-5)(\lambda+5)$，当 $\lambda=1$ 时得一基础解系 $(1,0,0)$，$\lambda=5$ 时得一基础解系 $(2,1,2)$，$\lambda=-5$ 时，得一基础解系 $(1,-2,1)$．所以，$X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$，使得 $X^{-1}AX=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 5 & \\ & & -5\end{pmatrix}$，从而 $X^{-1}A^kX=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 5^k & \\ & & (-5)^k\end{pmatrix}$，故 $A^k=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 5^k & 0\\ 0 & 0 & (-5)^k\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\cdot 5^{k-1}(1+(-1)^{k+1}) & 5^{k-1}(4+(-1)^k)-1\\ 0 & 5^{k-1}(1+4(-1)^k) & 2\cdot 5^{k-1}(1+(-1)^{k+1})\\ 0 & 2\cdot 5^{k-1}(1+(-1)^{k+1}) & 5^{k-1}(4+(-1)^k)\end{pmatrix}.$$

12. A 的特征多项式为

$$f(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda & -1\\ 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1,$$

由哈密尔顿－凯莱定理知 $f(A)=A^3-A^2-A+I=0$，即 $A^3=A^2+A-I$．从而知在 $n=3$ 时，$A^n=A^{n-2}+A^2-I$ 成立．

假设对 $n-1$ 成立，即 $A^{n-1}=A^{n-3}+A^2-I,(n-1\geqslant 3)$，两端乘以 A，并由 $A^3=A^2+A-I$ 可得

$$A^n=A^{n-2}+A^2-I(n\geqslant 3).$$

13. 由于 W 在 σ 下是不变的，设 $\sigma|_W$ 关于 W 的基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r(r=\dim W)$ 的矩阵为 A_r，于是 r 阶矩阵 A_r 有 r 个复特征根．令 λ_0 为 A_r 的一个特征根，α 为 $\sigma|_W$ 的属于 λ_0 的一个特征向量，这样 $\sigma|_W(\alpha)=\lambda_0\alpha$，即 $\sigma(\alpha)=\lambda_0\alpha$，对此令 $V_1=L(\alpha)$，显然 $V_1\subseteq W$，且是一维的 σ－子空间.

14. 由 $\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A$ 得

$$\sigma(\alpha_1) = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3,$$
$$\sigma(\alpha_2) = 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3,$$
$$\sigma(\alpha_3) = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3.$$

任取 $\beta \in W$,则有 $\beta = k_1(-\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(-\alpha_1 + \alpha_3)$,而
$\sigma(\beta) = k_1(-\sigma(\alpha_1) + \sigma(\alpha_2)) + k_2(-\sigma(\alpha_1) + \sigma(\alpha_3)) = k_1(\alpha_1 - \alpha_2) + k_2(\alpha_1 - \alpha_3) = -k_1(-\alpha_1 + \alpha_2) - k_2(-\alpha_1 + \alpha_3) \in W.$
故 W 是 σ 的不变子空间.

15. σ 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

可求得 $\mathrm{rank}A = 2$,且 $(0,-2,0,0)',(2,0,2,-2)'$ 是 A 的列向量组的一个极大线性无关组. 故 $\dim\sigma F^{2\times2} = 2$ 且 $\sigma(E_{11}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,$\sigma(E_{21}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ 是 $\sigma F^{2\times2}$ 的一组基.

求解 $Ax = 0$ 得基础解系 $(-1,1,0,0)',(1,0,0,1)'$. 故 $\dim\sigma^{-1}(0) = 2$ 且 $-E_{11} + E_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,$E_{11} + E_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 是 $\sigma^{-1}(0)$ 的一组基.

16. 取 $F[t]_4$ 的基 $1,t,t^2,t^3$,因为 $\sigma(1) = 1 - t^2$,$\sigma(t) = t - t^3$,$\sigma(t^2) = -1 + t^2$,$\sigma(t^3) = -t + t^3$,所以 σ 在基 $1,t,t^2,t^3$ 下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

可求得 $\mathrm{rank}A = 2$,且 $(1,0,-1,0)',(0,1,0,-1)'$ 是 A 的列向量组的一个极大线性无关组,故 $\dim\sigma(F[t]_4) = 2$,且 $\sigma(1) = 1 - t^2$,$\sigma(t) = t - t^3$ 是 $\sigma(F[t]_4)$ 的一组基.

求解 $Ax=0$ 得基础解系 $(1,0,1,0)'$, $(0,1,0,1)'$, 故 $\dim\sigma^{-1}(0)=2$, 且 $f_1(t)=1+t^2$, $f_2(t)=t+t^3$ 为 $\sigma^{-1}(0)$ 的一组基.

17. 因为 $A\sim B$, 而 B 是对角矩阵, 故知 A 有特征值 0,1,4, 可求得

$$|A-\lambda I|=-\lambda^3+(a+2)\lambda^2+(1+b^2-2a)\lambda+2b-1-b^2,$$

分别令 $\lambda=0,\lambda=1,\lambda=4$ 得

$$\begin{cases}2b-1-b^2=0\\-1+(a+2)+(1+b^2-2a)+2b-1-b^2=0\\-64+16(a+2)+4(1+b^2-2a)+2b-1-b^2=0\end{cases}$$

解得 $a=3,b=1$.

18. 设 $\dim(\mathrm{Ker}(\sigma)\cap W)=r\geqslant 0$.

当 $r=0$ 时, 令 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 为 W 一个基, 则

$$\sigma(W)=L(\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_m)).$$

此时只须证 $\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_m)$ 线性无关即可.

事实上, 若 $k_1\sigma(\alpha_1)+\cdots+k_m\sigma(\alpha_m)=0$, 则 $\sigma(k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m)=0$, 即 $k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m\in\mathrm{Ker}(\sigma)\cap W=\{0\}$. 因此 $k_1=\cdots=k_m=0$, 故 $\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_m)$ 线性无关, 所以

$$\dim\sigma(W)+\dim(\mathrm{Ker}(\sigma)\cap W)=\dim W.$$

当 $r>0$ 时, 令 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 为 $\mathrm{Ker}(\sigma)\cap W$ 的一个基. 对 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ 扩充为 W 一个基: $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m$. 于是 $\sigma(W)=L(\sigma(\alpha_1),\cdots,\sigma(\alpha_r),\sigma(\alpha_{r+1}),\cdots,\sigma(\alpha_m))=L(\sigma(\alpha_{r+1}),\cdots,\sigma(\alpha_m))$, 只要 $\sigma(\alpha_{r+1}),\cdots,\sigma(\alpha_m)$ 线性无关即证毕.

事实上, 若

$$k_{r+1}\sigma(\alpha_{r+1})+\cdots+k_m\sigma(\alpha_m)=0,$$

则 $\sigma(k_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+k_m\alpha_m)=0$. 于是

$$k_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+k_m\alpha_m\in\mathrm{Ker}(\sigma)\cap W=L(\alpha_1,\cdots,\alpha_r),$$

因此　$k_{r+1}\alpha_{r+1}+\cdots+k_m\alpha_m=k_1\alpha_1+\cdots+k_r\alpha_r$,

由于　$\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_m$ 为 W 的一个基, 故 $k_{r+1}=\cdots=k_m=0$.

所以 $\dim\sigma(W)=m-r$. 因此

$$\dim\sigma(W)+\dim\sigma(\mathrm{Ker}(\sigma)\cap W)=\dim W.$$

19. (1) 设 $\xi\in V_{\lambda_0}$, 则 $\sigma\xi=\lambda_0\xi$, 从而 $\sigma(\tau\xi)=(\sigma\tau)\xi=(\tau\sigma)\xi=$

$\tau(\sigma\xi) = \tau(\lambda_0\xi) = \lambda_0(\tau\xi)$,即有 $\tau\xi \in V_{\lambda_0}$,故 V_{λ_0} 是 τ 的不变子空间.

(2)由于 V_{λ_0} 是 τ 的不变子空间,记 $\tau | V_{\lambda_0} = \tau_0$,在复数域上,$\tau_0$ 必有特征值 μ,并存在非零向量 $\alpha \in V_{\lambda_0}$,使 $\tau_0\alpha = \mu\alpha$,故 $\tau\alpha = \tau_0\alpha = \mu\alpha$. 又 $\sigma\alpha = \lambda_0\alpha$,所以 α 是 σ 与 τ 的公共特征向量.

20. (1)⇒(2) 设 λ_0 为 σ 的任意一个特征值,ξ 是 σ 的属于 λ_0 的特征向量,则有 $\sigma(\xi) = \lambda_0\xi$,其中 $\xi \neq 0$. 由于 σ 为幂零变换,即 $\sigma^k = 0$,于是由 $\sigma^k(\xi) = \lambda_0{}^k\xi$,推出 $\lambda_0{}^k = 0$,进而 $\lambda_0 = 0$.

(2)⇒(3) 由于 σ 的特征值全为零,则 σ 的矩阵的 Jordan 标准形中每个 Jordan 块的主对角线元素皆为零,即

$$J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix},$$

所以 σ 的矩阵的 Jordan 标准形具有如下形式:

$$\begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}.$$

(3)⇒(4) 由于 σ 的矩阵相似于主对角线元素皆为零的上三角阵,然而主对角线元素皆为零的上三角形阵的特征多项式为 $f(\lambda) = \lambda^n$,所以 σ 的特征多项式就是 $f(\lambda) = \lambda^n$.

(4)⇒(1) 设 σ 的特征多项式为 $f(\lambda) = \lambda^n$,则根据 Hamilton - Caylay 定理有 $f(\sigma) = \sigma^n = 0$,因此 σ 是幂零变换.

第7章 欧氏空间

在向量空间中,向量之间的关系表现为加法与数量乘法,统称为线性运算.我们对于向量空间自身以及对于线性变换、矩阵的研究都是基于线性运算.向量空间作为几何空间的一种推广,缺少了几何向量的长度和夹角等度量概念,但是元素的度量性质在许多问题中有着特殊的地位.因此,有必要在向量空间中引入度量的概念,使其更接近于几何空间,并有更丰富的内容与方法.

7.1 内容提要

7.1.1 内积和欧几里得空间

1. 定义与简单性质

设 V 是实数域 R 上的一个向量空间.如果对于 V 中任意一对向量 α,β,有一个确定的记作 $<\alpha,\beta>$ 的实数与它们对应,并且下列条件被满足:(1)$\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\beta,\alpha\rangle$;(2)$\langle\alpha+\beta,\gamma\rangle=\langle\alpha,\gamma\rangle+\langle\beta,\gamma\rangle$;(3)$\langle k\alpha,\beta\rangle=k\langle\alpha,\beta\rangle$;(4) 当 $\alpha\neq0$ 时,$\langle\alpha,\alpha\rangle>0$;这里 α,β,γ 是 V 的任意向量,k 是任意实数,那么$\langle\alpha,\beta\rangle$ 叫做向量 α 与 β 的**内积**,而 V 叫做对这个内积来说的一个**欧几里得空间**(简称**欧氏空间**).

一些常见的欧氏空间:

(1)在向量空间 R^n 中,对于向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,定义 $\langle\alpha,\beta\rangle=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$,则这是 R^n 的一个内积,从而 R^n 作成欧氏空间.称这种内积为通常意义下的内积.

(2) $C[a,b]$ 是$[a,b]$上一切实连续函数作成的向量空间,对于 $f(x),g(x)\in C[a,b]$,定义$\langle f(x),g(x)\rangle=\int_a^b f(x)f(x)\mathrm{d}x$,则这是 $C[a,b]$ 的一个内积,从而 $C[a,b]$ 作成欧氏空间.

欧氏空间 V 的内积有下列简单性质:

(1) $\langle0,\alpha\rangle=0,\forall\alpha\in V$; (2)$\langle\alpha,k\beta\rangle=k\langle\alpha,\beta\rangle,\forall\alpha,\beta\in V$,

$\forall k \in \mathbb{R}$；

(3) $\langle \alpha, \beta + \gamma \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle + \langle \alpha, \gamma \rangle, \forall \alpha, \beta, \gamma \in V$；

(4) $\langle \sum_{i=1}^{m} a_i \alpha_i, \sum_{j=1}^{n} b_j \beta_j \rangle = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \langle \alpha_i, \beta_j \rangle$,

$\forall \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in V, \forall a_1, a_2, \cdots, a_m, b_1, b_2, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$.

2. 长度、夹角与正交、距离

设 V 是欧氏空间，对任意 $\alpha \in V$，非负实数 $\sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$ 称为**元素 α 的长度**，记为 $|\alpha|$，即 $|\alpha| = \sqrt{\langle \alpha, \alpha \rangle}$. 长度为 1 的向量称为**单位向量**.

非零元素 $\alpha, \beta \in V$ 的**夹角** θ 规定为

$$\cos\theta = \frac{\langle \alpha, \beta \rangle}{|\alpha||\beta|}, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi.$$

如果元素 $\alpha, \beta \in V$ 的内积为零，即 $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$，则称 α 与 β **正交**或**垂直**，记为 $\alpha \perp \beta$.

设 α, β 是欧氏空间 V 的向量，α, β 之间的**距离**指的是向量 $(\alpha - \beta)$ 的长度，记作 $d(\alpha, \beta)$. 即，$d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$.

长度具有如下性质（设 V 是欧氏空间，$\alpha, \beta \in V, k \in \mathbb{R}$）：

(1)（非负性）$|\alpha| \geqslant 0$，当且仅当 $\alpha = 0$ 时 $|\alpha| = 0$；

(2)（齐次性）$|k\alpha| = |k||\alpha|$；

(3)（三角不等式）$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|$, $|\alpha - \beta| \geqslant ||\alpha| - |\beta||$；

(4) 若 $\alpha \neq 0$，则 $|\alpha|^{-1}\alpha$ 是单位向量，称为将 α 单位化.

定理　（柯西－布涅柯夫斯基）对于欧氏空间 V 中的任意向量 α, β，成立不等式 $|\langle \alpha, \beta \rangle| \leqslant |\alpha||\beta|$，当且仅当 α, β 线性相关时，等号成立.

正交具有如下性质（设 V 是欧氏空间，$\alpha, \beta, \alpha_i, \beta_j \in V$）：

(1) 当 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 时，$\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \alpha$ 与 β 的夹角为 $\frac{\pi}{2}$；

(2) $\alpha \perp \beta \Leftrightarrow \beta \perp \alpha$；

(3) 零向量与任意向量正交；

(4) $\alpha \perp \alpha \Leftrightarrow \alpha = 0$；

(5) 若 α 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 均正交，则 α 与 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s$ 的任意一线性组合正交；

(6)若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geqslant 2)$ 两两正交,则对于任意的 $k_1,k_2,\cdots,k_s\in R$,$k_1\alpha_1,k_2\alpha_2,\cdots,k_s\alpha_s$ 两两正交.

(7)当 $\alpha\perp\beta$ 时,$|\alpha+\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2$;

(8)如果 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 两两正交,则

$$|\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_s|^2=|\alpha_1|^2+|\alpha_2|^2+\cdots+|\alpha_s|^2;$$

(9)两两正交的非零元素组是线性无关的.

距离具有如下性质(设 V 是欧氏空间,$\alpha,\beta,\gamma\in V$):

(1)$\mathrm{d}(\alpha,\beta)\geqslant 0$,$\mathrm{d}(\alpha,\beta)=0\Leftrightarrow\alpha=\beta$;

(2)$\mathrm{d}(\alpha,\beta)=\mathrm{d}(\beta,\alpha)$;

(3)$\mathrm{d}(\alpha,\beta)\leqslant\mathrm{d}(\alpha,\gamma)+\mathrm{d}(\gamma,\beta)$.

7.1.2 标准正交基与正交矩阵

1. 度量矩阵

设 V 是 n 维欧氏空间,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基,称矩阵

$$\begin{pmatrix}\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_1,\alpha_n\rangle\\ \langle\alpha_2,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_2,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_2,\alpha_n\rangle\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \langle\alpha_n,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_n,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_n,\alpha_n\rangle\end{pmatrix}.$$

为基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的**度量矩阵**.

度量矩阵有如下性质:

(1)设 $\alpha,\beta\in V$ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标分别为

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n),Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n),$$

则
$$\langle\alpha,\beta\rangle=XAY',$$

其中 A 是基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的度量矩阵,这表明任意两个元素的内积可以通过坐标和度量矩阵的乘积表示出来,即度量矩阵完全确定了内积;

(2)度量矩阵是对称正定的;

(3)设 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 V 的另一组基,且由基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的过渡矩阵为 C,则基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的度量矩阵 A 和基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的度量矩阵 B 满足 $B=C'AC$. 即不同基的度量矩阵是合同的.

2. 标准正交基

设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维欧氏空间 V 的一组基，如果它们两两正交，则称之为 V 的**正交基**；由单位元素组成的正交基称为**标准正交基**.

n 维欧氏空间 V 必存在正交基与标准正交基. 对 n 维欧氏空间 V 的任意一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，都可以用施密特(Schmidt) 正交化过程化为正交基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$. 施密特正交化过程如下：

$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_n,\beta_1\rangle}{\langle \beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\beta_n = \alpha_n - \frac{\langle \alpha_n,\beta_1\rangle}{\langle \beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1 - \frac{\langle \alpha_n,\beta_2\rangle}{\langle \beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2 - \cdots - \frac{\langle \alpha_n,\beta_{n-1}\rangle\beta_{n-1}}{\langle \beta_{n-1},\beta_{n-1}\rangle}.$$

如果再把每个 β_i 单位化，即得到 V 的一组标准正交基.

标准正交基的有关结果如下：

设 V 是 n 维欧氏空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组标准正交基，则

(1)标准正交基的度量矩阵是单位矩阵；

(2)设 $\alpha,\beta\in V$，且 α,β 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标分别为

$$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n),Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n),$$

则 $\langle\alpha,\beta\rangle = x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n = XY'$

(3) V 中任意一元素 α 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的坐标为

$$(\langle\alpha,\varepsilon_1\rangle,\langle\alpha,\varepsilon_2\rangle,\cdots,\langle\alpha,\varepsilon_n\rangle).$$

(4)由标准正交基到标准正交基的过渡矩阵是正交矩阵. 又若两组基之间的过渡矩阵是正交矩阵，且其中一组基是标准正交基，则另一组基也是标准正交基.

3. 正交矩阵

如果 n 阶实矩阵 A 满足 $A'A=I$，则称 A 为**正交矩阵**.

正交矩阵具有如下性质：

(1)正交矩阵是可逆矩阵，且其逆矩阵为正交矩阵；

(2)正交矩阵的行列式等于 +1 或 -1；

(3)正交矩阵的乘积是正交矩阵；

(4)正交矩阵的伴随矩阵是正交矩阵；

(5)三角形的正交矩阵必为对角形的矩阵,且主对角线上的元素为 +1 或 -1;

(6) n 阶实矩阵 A 是正交矩阵的充分必要条件是 A 的 n 个列(或行)向量是两两正交的单位向量.

7.1.3 欧氏空间的同构

设 V 与 V' 是两个欧氏空间,如果存在由 V 到 V' 的双射 σ,且对任意 $\alpha,\beta \in V,k \in \mathrm{R}$ 有 $\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$, $\langle\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$, 则称 σ 是 V 到 V' 的**同构映射**,此时称 V 与 V' 同构.

同构欧氏空间的有关结论如下:

(1)同构的欧氏空间具有反身性、对称性和传递性;

(2)任意 n 维欧氏空间都与 R^n 同构,从而 R^n 可以作为 n 维欧氏空间的代表;

(3)两个有限维欧氏空间同构的充分必要条件是它们有相同的维数.

7.1.4 正交变换

设 σ 是欧氏空间 V 的线性变换. 若对于任意 $\alpha \in V$,有 $|\sigma(\alpha)|=|\alpha|$,则称 σ 是一个**正交变换**.

欧氏空间 V 的单位变换 T_e 是正交变换. 设 η 是欧氏空间 V 的一单位向量,定义 σ: $\sigma(\alpha)=\alpha-2\langle\eta,\alpha\rangle\eta, \forall\alpha\in V$,则 σ 是一个正交变换,称为**镜面反射**,且 $\sigma^2=T_e$.

欧氏空间 V 的正交变换有下列简单性质:

(1) V 的正交变换 σ 是 V 到 V 的单射;

(2)若 V 的正交变换 σ 有特征值 λ_0,则 $\lambda_0\neq 0$;

(3) V 的正交变换的特征值是 +1 或 -1;

(4) V 的两个正交变换的乘积是 V 的正交变换;

(5) V 的正交变换保持夹角、距离不变;

设 σ 是欧氏空间 V 的线性变换,则下列诸条相互等价:

(1) σ 保持长度不变,即,对于任意 $\alpha\in V$,有 $|\sigma(\alpha)|=|\alpha|$;

(2) σ 保持距离不变,即,对于任意 $\alpha,\beta\in V$ 有 $\mathrm{d}(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))=$

$d(\alpha,\beta)$；

(3) σ 保持内积不变，即，对于任意 $\alpha,\beta\in V$ 有 $\langle\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$；

(4) σ 保持单位向量的内积不变，即，对于任意单位向量 $\xi,\eta\in V$，有

$$\langle\sigma(\xi),\sigma(\eta)\rangle=\langle\xi,\eta\rangle;$$

(5) σ 保持单位向量的长度不变，即，对于任意单位向量 $\varepsilon\in V$，有

$$|\sigma(\varepsilon)|=|\varepsilon|=1;$$

(6) 若 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的标准正交基，则 $\sigma(\varepsilon_1),\sigma(\varepsilon_2),\cdots,\sigma(\varepsilon_n)$ 也是标准正交基；

(7) σ 在 V 的任意一标准正交基下的矩阵为正交矩阵.

7.1.5　正交补、正射影

1. 子空间的正交关系、正交补

欧氏空间 V 的子空间 W 对于 V 的内积来说也作成欧氏空间.

设 W,S 是欧氏空间 V 的非空子集. 若对于任意 $\alpha\in W$，任意 $\beta\in S$，均有 $\langle\alpha,\beta\rangle=0$，则称 **$W$ 与 S 正交**，记作 $W\perp S$. 若向量 α 与 W 的任意向量正交，则称 **α 与 W 正交**，记作 $\alpha\perp W$.

设 W,S 是欧氏空间 V 的子空间. 若 $W\perp S$，则 $W\cap S=\{0\}$，从而，和 $W+S$ 是直和.

欧氏空间 V 中与向量 α 正交的一切向量作成 V 的一个子空间. V 中与非空子集 W 正交的一切向量作成 V 的一个子空间.

设 W 是欧氏空间 V 的子空间. 若存在 V 的子空间 S，使得 $W\perp S$，且 $W+S=V$，则称 S 是 W 的一个**正交补**. 若欧氏空间 V 的子空间 W 有正交补，则其正交补惟一，记作 $W^{\perp}$.

正交子空间有下列结果：

(1) 设 V 是欧氏空间，$\alpha,\alpha_i,\beta_j\in V$，则

$$\alpha\perp L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\Leftrightarrow\alpha\perp\beta_j(j=1,2,\cdots,t).$$

$$L(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\perp L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)\Leftrightarrow\alpha_i\perp\beta_j(i=1,2,\cdots,s;j=1,2,\cdots,t).$$

(2) 如果欧氏空间 V 的子空间 $W_1,W_2,\cdots,W_s$ 两两正交，则 $W_1+W_2+\cdots+W_s$ 是直和.

(3)有限维欧氏空间 V 的每一个子空间 W 都有惟一的正交补，且 $W^{\perp}$ 恰由所有与 W 正交的元素组成.

(4)在 n 维欧氏空间 V 的子空间 W 中取一组正交基(或标准正交基) $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r(0<r<n)$，将其扩充成 V 的正交基(或标准正交基) $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r,\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n$，则 $W^{\perp}=L(\varepsilon_{r+1},\cdots,\varepsilon_n)$.

(5)设 W 是欧氏空间 V 的子空间，则维(V) = 维(W) + 维$(W^{\perp})$.

2. 正射影

设 W 是欧氏空间 V 的子空间，$W^{\perp}$ 存在，$V=W\oplus W^{\perp}$，对任意 $\alpha\in V$，有 $\alpha=\beta+\gamma,\beta\in W,\gamma\in W^{\perp}$，则称 β 是向量 α 在子空间 W 上的正射影.

设 W 是欧氏空间 V 的子空间，$W^{\perp}$ 存在，$\alpha\in V$，则有：(1) 若 β 是 α 在 W 上的正射影，则 $(\alpha-\beta)\perp W$，且对于任意 $\beta'\in W$，有 $|\alpha-\beta'|^2=|\alpha-\beta|^2+|\beta-\beta'|^2$；(2) β 是 α 在 W,上的正射影 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\beta'\in W$，成立 $|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha-\beta'|$，而且，等号成立当且仅当 $\beta'=\beta$.

α 在 W 上的正射影，有明显的几何意义. 当 V 是三维几何空间时，α 在 W 上的正射影，就是“点” α 在平面 W 上的正射影，$\alpha-\beta$ 就是由“点” α 到 W 的垂线，$|\alpha-\beta|$ 就是“点” α 到平面 W 的最短距离.

当 W 是有限维子空间时，α 在 W 上的正射影是存在且惟一的，并且，可以具体地求出来.

若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 W 的任意一组基，则向量 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_m\alpha_m$ 是向量 α 在 W 上的正射影 $\Leftrightarrow x_1,x_2,\cdots,x_m$ 为下列线性方程组的解：

$$\sum_{j=1}^{m}\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle x_j=\langle\alpha,\alpha_i\rangle,i=1,2,\cdots,m.$$

7.1.6　对称变换与实对称矩阵

1. 对称变换与实对称矩阵

设 σ 是欧氏空间 V 的一个线性变换，若对于任意 $\alpha,\beta\in V$，均有 $\langle\sigma(\alpha),\beta\rangle=\langle\alpha,\sigma(\beta)\rangle$，则称 σ 是 V 的一个**对称变换**.

对称变换有下列性质：(1) T_e 是对称变换；(2) 实数 k 与对称变换 σ 的乘积 $k\sigma$ 是对称变换；(3) 两个对称变换的和是对称变换；(4) 欧氏空间 V 的变换 σ 是对称变换 $\Leftrightarrow$ 对任意 $\alpha,\beta\in V$，成立 $\langle\sigma(\alpha),\beta\rangle=\langle\alpha,$

$\sigma(\beta)\rangle$.

设 σ 是 $n(n>0)$ 维欧氏空间 V 的一个线性变换. 若 σ 是 V 的一个对称变换,则 σ 在 V 的任意一标准正交基下的矩阵是实对称矩阵;反之,若 σ 在 V 的某一标准正交基下的矩阵是实对称矩阵,则 σ 是 V 的一个对称变换. 简言之,σ 是对称变换的必要充分条件是 σ 在 V 的任意一标准正交基下的矩阵是对称矩阵. 设 σ 是欧氏空间 V 的对称变换,则存在 V 的一组标准正交基,使 σ 在该基下的矩阵为对角矩阵.

$n(n>0)$ 维欧氏空间 V 的两个对称变换 σ_1,σ_2 的乘积 $\sigma_1\sigma_2$ 是对称变换 $\Leftrightarrow \sigma_1\sigma_2=\sigma_2\sigma_1$.

2. 特征值与特征向量

实对称矩阵的特征值都是实数,从而,n 阶实对称矩阵有 n 个实特征值(重特征值按重数来计算). 实对称矩阵的不同特征值对应的特征向量必正交.

$n(n>0)$ 维欧氏空间 V 的任意一对称变换至少有一个特征值.

设 σ 是欧氏空间 V 的对称变换,W 是 V 的子空间,$W^{\perp}$ 存在. 若 W 是 σ 的不变子空间,则 $W^{\perp}$ 也是 σ 的不变子空间.

设 σ 是 $n(n>0)$ 维欧氏空间 V 的对称变换,λ_0 是 σ 的一个特征值,α 是属于 λ_0 的特向量. 若 $M=\{x \mid x\in V$ 且 $x\perp\alpha\}$,则 M 是 σ 的不变子空间,且 $\dim M=n-1$.

设 σ 是 $n(n>0)$ 维欧氏空间 V 的一个对称变换,则 σ 有 n 个特征向量作成 V 的一组标准正交基. 从而,σ 在该基下的矩阵是对角形矩阵,主对角线上的元素就是 σ 的全部特征值(重特征值按重数计算).

设 σ 是 $n(n>0)$ 维欧氏空间 V 的一个对称变换,则 V 可以分解为两两正交的 σ 的一维不变子空间的直和.

设 σ 是 $n(n>0)$ 维欧氏空间 V 的一个对称变换,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 是 σ 的全部互异的特征值,则从每个特征子空间 V_{λ_i} 中各取一组标准正交基,即可合并成 V 的一组标准正交基,且 σ 在该组基下的矩阵是对角形.

3. 实对称矩阵正交对角化

对于任意一 n 阶实对称矩阵 A,都存在一个 n 阶正交矩阵 T,使 $T'AT=T^{-1}AT$ 成对角形,主对角线上的元素就是 A 的全部特征值.

求正交矩阵 T 和对角形 $T'AT = T^{-1}AT$，称为**正交对角化**. 按下列步骤进行：

(1)求 A 的特征值. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 是 A 的全部不同的特征值；

(2)对每个 λ_i，求齐次线性方程组$(\lambda_iI-A)X=0$ 的一基础解系，这就是 A 的特征子空间 V_{λ_i} 的一组基. 由 V_{λ_i} 的这组基出发，施行施密特正交化过程，得到 V_{λ_i} 的一组标准正交基 $\varepsilon_{i1},\varepsilon_{i2},\cdots,\varepsilon_{ik_i}$；

(3)以 $\varepsilon_{11},\cdots,\varepsilon_{1k_1},\cdots,\varepsilon_{r1},\cdots,\varepsilon_{rk_r}$ 为列作成 T，则 T 是正交矩阵，且 $T'AT=T^{-1}AT$ 是对角形矩阵 D，D 的主对角线元素就相应地写为 $\lambda_1,\cdots,\lambda_1,\cdots,\lambda_r,\cdots,\lambda_r$，其中 λ_1 重复 k_1 次，$\cdots$，λ_r 重复 k_r 次，$k_1+\cdots+k_r=n$.

7.2　重点和难点

本章的重点是：欧氏空间的基本概念，标准正交基与正交矩阵，对称变换与实对称矩阵，正交补.

本章通过在实数域上的向量空间中引入内积的概念得到欧氏空间，利用内积定义了长度、夹角、距离、正交等基本概念，所有这些，都作为全章的基础，因此，欧氏空间的基本概念，成为本章的一个重点.

我们主要讨论有限维欧氏空间，而标准正交基起着根本的作用，标准正交基贯穿于全章，成为基本的工具. 由于标准正交基的存在，使得向量的内积、长度、距离等都有了较为明显的表达式. 利用标准正交基的特性，可以使许多问题变得非常简单. 由于研究标准正交基之间的关系而引入的正交矩阵，既作为标准正交基之间的过渡矩阵，又刻划了正交变换的特征. 因此，标准正交基与正交矩阵，成为本章的一个重点.

$n(n>0)$ 维欧氏空间的对称变换与 n 阶实对称矩阵密切联系在一起，由于有了欧氏空间的知识，就证明了实对称矩阵的特征值均为实数，找到了对称变换的 n 个线性无关的特征向量组成标准正交基，从而使实对称矩阵正交对角化，得到了一些更深刻的结果，因此，对称变换与实对称矩阵，成为本章的一个重点.

将向量空间关于某个子空间进行的直和分解不是惟一的，但将欧氏空间关于某个子空间及其正交补空间的直和分解是惟一的. 欧氏空

间的这种分解是很重要的，要求掌握子空间的正交补的概念及基本性质，会求某些子空间的正交补. 因此，正交补成为本章的一个重点.

本章的难点是：正交变换，正交补，对称变换与实对称矩阵.

正交变换成为本章的一个难点，原因在于：(1) 正交变换的性质很多，而且有的是特征性质，有的则不是，有的性质因有限维与无限维而异；(2) $n(n>0)$ 维欧氏空间的正交变换按其行列式分为两类，不容易理解其本质；(3) 正交变换的特征值较对称变换要复杂得多；(4) 二维几何空间 V_2、三维几何空间 V_3 中的正交变换，其分类与推证也较复杂. 解决困难的方法是：(1) 详细地研究例子 T_e 与镜面反射，熟悉定义；(2) 通过举反例给以区别，并加深认识；(3) 详细地研究 V_2 与 V_3 的情况，理解其几何意义.

正交补成为本章的一个难点，原因在于：(1) 正交补综合了子空间、正交、和、直和几种概念，从而成为较为高级的概念；(2) 其存在性的证明不易理解与掌握，而且，无限维的情况不成立；(3) 性质及应用较多，并且较复杂. 解决困难的方法是：(1) 复习子空间、和、直和等概念，作好准备；(2) 详细地分析正交补的定义，理解"正交"与"补"的含义；(3) 在理解与应用正交补的过程中，充分发挥直和分解式的作用；(4) 重点研究 $n(n>0)$ 维欧氏空间的子空间的正交补，并且，注意标准正交基的作用.

对称变换与实对称矩阵是本章的一个难点，原因在于：(1) 较多地应用了以前的知识，综合性较强；(2) 对称变换的实质不易理解；(3) 计算较复杂；(4) 主要定理的证明应用了数学归纳法. 解决困难的方法是：(1) 复习特征值、特征向量、正交化等，作好准备；(2) 抓住对称变换与实对称矩阵的联系，通过实对称矩阵来加深理解对称变换；(3) 注意发挥标准正交基的作用；(4) 认真地做一个例子.

7.3　例题解析

7.3.1　内积与欧氏空间

1. 构成欧氏空间的两种方法

(1)定义一个二元函数使之成为内积

例 1 用 $M_n(\mathrm{R})$ 表示 n 阶实方阵全体所成的实向量空间，定义 $M_n(\mathrm{R})$ 上的一个二元函数 $\langle A,B\rangle$

$$\langle A,B\rangle = Tr(AB').$$

证明：$M_n(\mathrm{R})$ 对于 $\langle A,B\rangle$ 构成一个欧氏空间.

证明 只需证 $\langle A,B\rangle$ 为 $M_n(\mathrm{R})$ 上的一个内积. 由

1° $\langle A,B\rangle = Tr(AB') = Tr[(AB')'] = Tr(BA') = \langle B,A\rangle$,

2° $\langle kA,B\rangle = Tr(kA\cdot B') = kTr(AB') = k\langle A,B\rangle$,

$$\begin{aligned}\langle A+B,C\rangle &= Tr[(A+B)C'],\\ &= Tr(AC'+BC') = Tr(AC') + Tr(BC'),\\ &= \langle A,C\rangle + \langle B,C\rangle,\end{aligned}$$

3° 令 $A=(a_{ij})$，则 $\langle A,A\rangle = Tr(AA') = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \geqslant 0.$

当且仅当 $a_{ij}=0(i,j=1,2,\cdots,n)$，即 $A=0$ 时，$\langle A,A\rangle = 0$，所以 $\langle A,B\rangle$ 为 $M_n(\mathrm{R})$ 上的一个内积，从而 $M_n(\mathrm{R})$ 关于 $\langle A,B\rangle$ 构成一个欧氏空间.

(2)由正定矩阵确定内积

若 V 为 n 维实向量空间，任取基底 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，令 A 为一 n 阶实正定矩阵，定义

$$\langle\alpha,\beta\rangle = (a_1,a_2,\cdots,a_n)A\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}.$$

其中 $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n$，$\beta = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_n\alpha_n$，那么很容易证明 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 满足内积的三个条件，从而 V 关于 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 构成一个欧氏空间.

例 2 设 $V = F_2[x]$ 取 V 的一组基 $1,x,x^2$ 及

$$A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

时，对 $\forall\alpha,\beta\in F_2[x]$，其中 $\alpha = a_0 + a_1x + a_2x^2$，$\beta = b_0 + b_1x + b_2x^2$，令

$$\langle\alpha,\beta\rangle=(a_0,a_1,a_2)A\begin{pmatrix}b_0\\b_1\\b_2\end{pmatrix}=a_0b_0+(2a_1+a_2)b_1+(a_1+a_2)b_2,$$

则 $F_2[x]$ 关于$\langle\alpha,\beta\rangle$ 就构成一个 3 维欧氏空间.

注　由于欧氏空间是定义了内积的实向量空间,所以要使实向量空间成为欧氏空间的关键在于给出内积. 上面构成欧氏空间的两种方法,实质上是一回事,前者通过给定的二元函数确定内积,而后者是由一正定矩阵确定内积,我们知道度量矩阵是正定矩阵,而由正定矩阵确定内积时,基底 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的度量矩阵恰为所给的正定矩阵,所以上述两种方法可以说前者是由二元函数确定度量矩阵,后者是由度量矩阵确定二元函数. 但值得注意的是,在同一基底上以不同的正定矩阵为度量矩阵得到的是不同的欧氏空间.

2. 利用内积性质

例 3　设 V 为欧氏空间 R^n,向量 $\alpha_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})(i=1,2,\cdots,n)$ 两两正交,且 $|\alpha_i|=i$,令 $A=(a_{ij})_{nn}$,求行列式 $|A|$ 的值.

解　因为

$$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=\begin{cases}0 & i\neq j\\ i^2 & i=j\end{cases}.$$

所以

$$A\cdot A'=\begin{pmatrix}1^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 2^2 & \cdots & 0\\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & n^2\end{pmatrix}.$$

于是 $|A|^2=|A\cdot A'|=(n!)^2$,故 $|A|=\pm n!$

注　从此例看出,为了定义欧氏空间引进了内积概念,使得许多与内积有关的问题,在巧妙地作内积后,使问题迎刃而解.

3. 柯西 - 布涅柯夫斯基不等式的运用

例 4　证明:对任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 有 $\sum\limits_{i=1}^{n}|a_i|\leqslant\sqrt{n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}$.

证明　设 R^n 为关于通常内积 $\langle\alpha,\beta\rangle=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i$,其中 $\alpha=(x_1,x_2,$

$\cdots,x_n)$，$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 所构成的一个欧氏空间，取 R^n 中向量

$$\alpha=(|a_1|,|a_2|,\cdots,|a_n|),\beta=(1,1,\cdots,1).$$

则

$$\langle\alpha,\beta\rangle=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|,|\alpha|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2},|\beta|=\sqrt{n}.$$

由柯西－布涅柯夫斯基不等式，即得

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i|\leqslant\sqrt{n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)}.$$

4. 计算长度、夹角、距离

按照定义，直接进行计算.

例 5　在欧氏空间 R^4（内积按通常定义）中，已知 $\alpha=(2,1,3,2)$，$\beta=(1,2,-2,1)$，求 $|\alpha|$，$|\beta|$，α 与 β 的夹角，$|\alpha+\beta|$，$d(\alpha,\beta)$.

解　$|\alpha|=\sqrt{\langle\alpha,\alpha\rangle}=\sqrt{2^2+1^2+3^2+2^2}=3\sqrt{2}$，

$$|\beta|=\sqrt{\langle\beta,\beta\rangle}=\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2+1^2}=\sqrt{10},$$

由 $\arccos\dfrac{\langle\alpha,\beta\rangle}{|\alpha||\beta|}=\arccos\dfrac{0}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}=\arccos 0$，故 α 与 β 的夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$，

$$|\alpha+\beta|=\sqrt{\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle}=\sqrt{3^2+3^2+1^2+3^2}=2\sqrt{7},$$

$$d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|=\sqrt{1^2+(-1)^2+5^2+1^2}=2\sqrt{7}.$$

7.3.2　求度量矩阵

按照度量矩阵的定义及不同基的度量矩阵之间的关系，求出度量矩阵.

例 6　设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是欧氏空间 V 的一组基，且 $\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle=a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，向量 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\varepsilon_i$，$\beta=\sum\limits_{j=1}^{n}y_j\varepsilon_j$，试写出基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的度量矩阵，$|\alpha|^2$，$\langle\alpha,\beta\rangle$.

解　基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的度量矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&&&\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}.$$

$$|\alpha|^2=\langle\sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i,\sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i\rangle=\langle\sum_{i=1}^n x_i\varepsilon_i,\sum_{j=1}^n x_j\varepsilon_j\rangle.$$

$$=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n x_ix_j\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j=XAX',$$

其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

同理 $\langle\alpha,\beta\rangle=XAY'$.

例 7　在欧氏空间 R^4 中,已知基 $\alpha_1=(1,-1,0,0),\alpha_2=(-1,2,0,0),\alpha_3=(0,1,2,1),\alpha_4=(1,0,1,1)$ 的度量矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}2&-3&0&1\\-3&6&0&-1\\0&0&13&9\\1&-1&9&7\end{pmatrix},$$

试求基 $\varepsilon_1=(1,0,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0,0),\varepsilon_3=(0,0,1,0),\varepsilon_4=(0,0,0,1)$ 的度量矩阵.

解　因为,由基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 到 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 的过渡矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&1\\-1&2&1&0\\0&0&2&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&1&-3\\1&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&-1&2\end{pmatrix}=C,$$

所以,基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 的度量矩阵为

$$C'AC=\begin{pmatrix}2&1&0&-1\\1&2&-1&0\\0&-1&2&1\\-1&0&1&3\end{pmatrix}.$$

例 8　设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$,为 n 维欧氏空间 V 的一个基,A 为基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的度量阵.

证明:(1)度量阵 A 是可逆的;

(2)度量阵 A 是正定的.

证明　(1)因

$$A=\begin{pmatrix}\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle&\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle&\cdots&\langle\alpha_1,\alpha_n\rangle\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\langle\alpha_n,\alpha_1\rangle&\langle\alpha_n,\alpha_2\rangle&\cdots&\langle\alpha_n,\alpha_n\rangle\end{pmatrix},$$

所以欲证 A 是可逆的,即 $|A| \neq 0 \Leftrightarrow AX = 0$ 只有零解. 然而 n 元齐次方程组

$$AX = \begin{pmatrix} \langle \alpha_1,\alpha_1\rangle & \cdots & \langle \alpha_1,\alpha_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \alpha_n,\alpha_1\rangle & \cdots & \langle \alpha_n,\alpha_n\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \qquad (*)$$

只有零解 $\Leftrightarrow \langle \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i,\alpha_j\rangle = 0, j = 1,\cdots,n$, 只有 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. 故由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是 V 一个基,因而 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关,即若 $\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i = 0$,则 $x_i = 0, i = 1,\cdots,n$. 亦即若 $\langle \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i,\alpha_j\rangle = 0, j = 1,\cdots,n$, 则 $x_i = 0, i = 1,\cdots,n$. 因此 n 元齐次方程组(*) 只有零解.

所以度量阵 A 是可逆的.

(2) 由内积的性质知 $A' = A$, 即 A 为实对称阵.

$$\forall \alpha(\neq 0) \in V(R), \alpha = \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i, \langle \alpha,\alpha\rangle > 0,$$

因而

$$\langle \alpha,\alpha\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i, \sum_{j=1}^{n} x_j\alpha_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_ix_j\langle \alpha_i,\alpha_j\rangle$$

$$= (x_1,\cdots x_n)\begin{pmatrix} \langle \alpha_1,\alpha_1\rangle & \cdots & \langle \alpha_1,\alpha_n\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle \alpha_n,\alpha_1\rangle & \cdots & \langle \alpha_n,\alpha_n\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X'AX > 0,$$

其中 $X = (x_1,\cdots,x_n)' \neq 0$ 为 V 中任意一向量 α 关于基 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 的坐标,并且是任意一组不全为零的实数. 故 A 为正定.

7.3.3 标准正交基

1. 求标准正交基的两种方法

(1) 初等变换法

设 V 是一个 n 维向量空间, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组基,设其度量矩阵为 A, 那么 A 是一正定矩阵,故由初等变换可求得可逆矩阵 C, 使 $C'AC = I$, 再以 C 为过渡矩阵,由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 得到一组新基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$. 即

$$(\beta_1,\cdots,\beta_n) = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)C.$$

则$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$的度量矩阵就等于$C'AC = I$,所以$\beta_1,\cdots,\beta_n$是$V$的一组标准正交基.

例 9　已知欧氏空间V的一组基为$\varepsilon_1 = (1,0,0),\varepsilon_2 = (0,1,0)$,$\varepsilon_3 = (0,0,1)$,其度量矩阵为$A = \begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}$,求$V$的一组标准正交基.

解　由$\begin{pmatrix}1 & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$,

故以$C = \begin{pmatrix}1 & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$为过渡矩阵,得基

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3) = (\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}1 & & \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} & \\ & & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}.$$

即$\eta_1 = \varepsilon_1,\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\varepsilon_2,\eta_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon_3$就是$V$的一组标准正交基.

(2)正交化方法

我们用施密特正交化方法求标准正交基,此又分两种:①先正交化,后单位化;②正交化和单位化同时进行.

例 10　设$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是3维欧氏空间$V$的一组基,这组基的度量矩阵是

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

求 V 的一组标准正交基.

解 采用正交化方法. 因为 A 是基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的度量矩阵,所以

$$\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle=1,\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle=-1,\langle\alpha_1,\alpha_3\rangle=1$$
$$\langle\alpha_2,\alpha_2\rangle=2,\langle\alpha_2,\alpha_3\rangle=0,\langle\alpha_3,\alpha_3\rangle=4.$$

正交化得

$$\beta_1=\alpha_1,$$
$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\alpha_1\rangle}{\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle}\alpha_1=\alpha_1+\alpha_2,$$
$$\begin{aligned}\beta_3&=\alpha_3-\frac{\langle\alpha_3,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1-\frac{\langle\alpha_3,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2\\&=\alpha_3-\frac{\langle\alpha_3,\alpha_1\rangle}{\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle}\alpha_1-\frac{\langle\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2\rangle}{\langle\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2\rangle}(\alpha_1+\alpha_2)\\&=\alpha_3-\alpha_1-\frac{\langle\alpha_3,\alpha_1\rangle+\langle\alpha_3,\alpha_2\rangle}{\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle+2\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle+\langle\alpha_2,\alpha_2\rangle}(\alpha_1+\alpha_2)\\&=-2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3.\end{aligned}$$

再单位化得 V 的标准正交基

$$\gamma_1=\frac{1}{|\beta_1|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle}}\alpha_1=\alpha_1.$$
$$\gamma_2=\frac{1}{|\beta_2|}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{\langle\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2\rangle}}(\alpha_1+\alpha_2)=\alpha_1+\alpha_2.$$
$$\begin{aligned}\gamma_3&=\frac{1}{|\beta_3|}\beta_3=\frac{1}{\sqrt{\langle-2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\ -2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3\rangle}}\beta_3.\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}(-2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3).\end{aligned}$$

例 9 另解: 由 $\langle\varepsilon_1,\varepsilon_1\rangle=1,\langle\varepsilon_2,\varepsilon_2\rangle=2,\langle\varepsilon_3,\varepsilon_3\rangle=3,\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle=0(i\neq j,i,j=1,2,3)$,用边正交化、边单位化方法,令

$$\eta_1=\frac{\varepsilon_1}{|\varepsilon_1|}=\varepsilon_1=(1,0,0).$$
$$\eta_2=\frac{\varepsilon_2-\langle\varepsilon_2,\eta_1\rangle\eta_1}{|\varepsilon_2-\langle\varepsilon_2,\eta_1\rangle\eta_1|}=\frac{\varepsilon_2}{|\varepsilon_2|}=(0,\frac{1}{\sqrt{2}},0).$$

$$\eta_3=\frac{\varepsilon_3-\langle\varepsilon_3,\eta_1\rangle\eta_1-\langle\varepsilon_3,\eta_2\rangle\eta_2}{|\varepsilon_3-\langle\varepsilon_3,\eta_1\rangle\eta_1-\langle\varepsilon_3,\eta_2\rangle\eta_2|}=\frac{\varepsilon_3}{|\varepsilon_3|}=(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

于是 η_1,η_2,η_3 就为 V 的一组标准正交基.

注　从上面两种求标准正交基的方法看出,一般来说正交化方法较初等变换法简单些,因为它可不涉及具体的度量矩阵,但用初等变换法时,必须先根据空间的内积,求出度量矩阵,再施行初等变换. 更重要的是,正交化方法有规律,可由计算机计算. 但用正交化方法时,须特别注意空间的内积,且在正交化单位化分开进行时,一定要先正交化,后单位化,否则求出的向量组就不一定再是单位化的了.

2. 利用标准正交基的性质

例 11　设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是欧氏空间 V 的一组标准正交基,证明

$$\alpha_1=\frac{1}{3}(2\varepsilon_1+2\varepsilon_2-\varepsilon_3).$$

$$\alpha_2=\frac{1}{3}(2\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3).$$

$$\alpha_3=\frac{1}{3}(\varepsilon_1-2\varepsilon_2-2\varepsilon_3).$$

仍是 V 的标准正交基.

证明　由于

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

令

$$A=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}\\ -\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&-\frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

则因 $A \cdot A' = A' \cdot A = I$,知 A 为正交矩阵,又因 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 为标准正交基,从而 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 也为 V 的一组标准正交基.

例 12　令 V 是一 n 维欧氏空间,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一组标准正交基,σ 是 V 的一个线性变换,$A = (a_{ij})$ 是 σ 关于这个基的矩阵,证明:$a_{ij} = \langle \sigma\alpha_i,\alpha_j \rangle, i,j = 1,2,\cdots,n$.·

证明　据题设,可得 $\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)A$,展开得

$\sigma(\alpha_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\alpha_k, i = 1,2,\cdots,n$,又因 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为标准正交基,故

$$\langle \sigma\alpha_i,\alpha_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\alpha_k,\alpha_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\langle \alpha_k,\alpha_j \rangle = a_{ji},(i,j = 1,2,\cdots n),$$

故结论成立.

注　从上面几例看出,标准正交基是欧氏空间很重要的一个概念,利用标准正交基的特性,可以使许多问题变得非常简单,这正是引入标准正交基的好处.

7.3.4　子空间 W 的正交补 $W^{\perp}$

1. 求正交补

求正交补的方法有两个:

(1)求出 W 的一正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m, 0 < m < n$,扩充为 V 的正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n$,从而 $W^{\perp} = L(\alpha_{m+1},\cdots,\alpha_n)$;

(2)求出 W 的一组基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t, 0 < t < n$,且设 $\beta_i = (a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$,解齐次线性方程组 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0, i = 1,2,\cdots,t$,得一基础解系 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-t}$ 则,$W^{\perp} = L(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-t})$.

例 13　设 $W = L((1,0,0,0),(0,2,0,0))$ 是 R^4 的一个子空间,求 $W^{\perp}$.

解　设 $\alpha_1 = (1,0,0,0),\alpha_2 = (0,2,0,0)$,则 $\alpha_1 \perp \alpha_2$,所以 α_1,α_2 是 W 的一个正交基,取 $\alpha_3 = (0,0,1,0),\alpha_4 = (0,0,0,1)$,于是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 为 R^4 的一个正交基,则 $W^{\perp} = L(\alpha_3,\alpha_4)$.

例 14　设 W 是欧氏空间 R^3 的二维子空间,其基为 $\alpha_1 = (1,1,0)$,$\alpha_2 = (0,1,1)$,求 $W^{\perp}$

解 解齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$$

得基础解系为$(-1,1,-1)$,因而$W^{\perp}=L((-1,1,-1))$.

例15 设V为4维欧氏空间,$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$为$V$的一个标准正交基,子空间$W=L(\alpha_1,\alpha_2)$,其中$\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_2,\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2-\varepsilon_3$,求$W^{\perp}$.

解 设$\alpha=x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3+x_4\varepsilon_4\in W^{\perp}$,则有

$$\begin{cases}\langle\alpha,\alpha_1\rangle=x_1+x_2=0\\\langle\alpha,\alpha_2\rangle=x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$$

解方程组得基础解系$(-1,1,0,0)',(0,0,0,1)'$,所以$W^{\perp}=L(\alpha_3,\alpha_4)$,其中$\alpha_3=-\varepsilon_1+\varepsilon_2,\alpha_4=\varepsilon_4$.

注 从上面两种求正交补的方法看,对于求R^n的子空间W的正交补$W^{\perp}$,方法(2)要比方法(1)简单得多,因为方法(1)要求出W及V的正交基,这是比较麻烦的,所以我们常常采用方法(2).

2. 利用正交补

由于一个欧氏空间的子空间的正交补中的任意向量都与这个子空间正交,我们可以利用正交补的性质来证明与某一子空间正交有关的性质.

例16 设V_1,V_2是n维欧氏空间V的两个子空间,证明:(1)$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$,(2)$(V_1\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$.

证明 (1)对$\forall\alpha\in(V_1+V_2)^{\perp}$则$\alpha$与$V_1+V_2$中每个向量正交,由$V_1\subset V_1+V_2,V_2\subset V_1+V_2$,所以$\alpha\in V_1^{\perp}$且$\alpha\in V_2^{\perp}$,于是$\alpha\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$. 反之,对$\forall\alpha\in V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$,则$\alpha\in V_1^{\perp}$且$\alpha\in V_2^{\perp}$,所以$\alpha$与$V_1$和$V_2$的每一向量正交,又对$\forall\beta\in V_1+V_2$,则存在$\beta_1\in V_1,\beta_2\in V_2$,使$\beta=\beta_1+\beta_2$,于是$\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\alpha,\beta_1+\beta_2\rangle=\langle\alpha,\beta_1\rangle+\langle\alpha,\beta_2\rangle=0+0=0$, 所以$\alpha\in(V_1+V_2)^{\perp}$,因此$(V_1+V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}\cap V_2^{\perp}$.

(2)由于V的子空间W与正交补$W^{\perp}$有关系:$(W^{\perp})^{\perp}=W$,结合(1)有$(V_1^{\perp}+V_2^{\perp})=(V_1^{\perp})^{\perp}\cap(V_2^{\perp})^{\perp}=V_1\cap V_2$. 故$(V_1\cap V_2)^{\perp}=V_1^{\perp}+V_2^{\perp}$.

注 要找一个非零向量正交于子空间 W,即要找属于 $W^{\perp}$ 的一个非零向量.

3. **正射影**

求 α 在 W 上的正射影的方法:设 W 的一组基为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$,则可求得方程组 $\sum_{j=1}^{t}\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle x_j=\langle\alpha_i,\alpha\rangle, i=1,2,\cdots,t$ 的惟一解 $(x_1,x_2,\cdots,x_t)$,从而,α 在 W 上的正射影是 $\beta=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_t\alpha_t$.

例 17 欧氏空间 $\mathbf{R}^4$(内积按通常定义)中,子空间 W 的一组基为 $\alpha_1=(1,-1,1,-1),\alpha_2=(0,1,1,1)$,试求 $\alpha=(1,1,1,1)$ 在 W 上的正射影.

解 方程组

$$\begin{cases}\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle x_1+\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle x_2=\langle\alpha_1,\alpha\rangle\\ \langle\alpha_2,\alpha_1\rangle x_1+\langle\alpha_2,\alpha_2\rangle x_2=\langle\alpha_2,\alpha\rangle\end{cases}$$

即为 $\begin{cases}4x_1-x_2=0\\ -x_1+3x_2=3\end{cases}$,解得 $x_1=\frac{3}{11},x_2=\frac{12}{11}$,从而 α 在 W 上的正射影是

$$\beta=\frac{3}{11}\alpha_1+\frac{12}{11}\alpha_2=\left(\frac{3}{11},\frac{9}{11},\frac{15}{11},\frac{9}{11}\right).$$

7.3.5 实对称矩阵的正交对角化

实对称矩阵的正交对角化,即是求一个正交矩阵 T,使 $T^{-1}AT=T'AT$ 是对角形.因此这就相当于在欧氏空间中求一组由 A 的特征向量构成的标准正交基.具体步骤见 7.1.6 中 3.

例 18 已知

$$A=\begin{pmatrix}17&-2&-2\\-2&14&-4\\-2&-4&14\end{pmatrix},$$

试求正交矩阵 T,使 $T'AT=T^{-1}AT$ 为对角形.

解 (1) $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-17&2&2\\2&\lambda-14&4\\2&4&\lambda-14\end{vmatrix}=(\lambda-9)(\lambda-18)^2,$

从而, A 的特征值为 $\lambda_1 = 9, \lambda_2 = \lambda_3 = 18$.

(2)对于 $\lambda_1 = 9$,解方程组

$$\begin{cases} -8x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases}$$

得一基础解系(1,2,2),单位化得 $\eta_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

对于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 18$, 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

得一基础解系(−2,1,0),(−2,0,1),正交化并单位化得

$$\eta_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right), \eta_3 = \left(-\frac{2}{\sqrt{45}}, \frac{-4}{\sqrt{45}}, \frac{5}{\sqrt{45}}\right).$$

(3)作

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-4}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} \end{pmatrix}.$$

则

$$T'AT = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 9 & & \\ & 18 & \\ & & 18 \end{pmatrix}.$$

7.3.6　正交变换、对称变换

1. 正交变换

关于正交变换的证明,首先要考虑运用正交变换的定义及等价条件;其次,在有限维欧氏空间的情况下,要注意正交变换与正交矩阵的相互转化.

例 19　设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$，$\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 是 n 维欧氏空间的两组标准正交基，证明：

(1) 存在 V 的一个正交变换 σ，使 $\sigma(\alpha_i)=\beta_i, i=1,2,\cdots,n$；

(2) 如果 V 的一个正交变换 τ，使得 $\tau(\alpha_1)=\beta_1$，那么 $\tau(\alpha_2),\cdots,\tau(\alpha_n)$ 所生成的子空间与 $L(\beta_2,\cdots,\beta_n)$ 重合.

证明　(1) 由条件知由 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ 到 $\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}$ 的过渡矩阵为正交矩阵，设为 A，这样必有一个线性变换 σ 关于 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的矩阵为 A，从而 σ 是正交变换，且满足 $\sigma(\alpha_i)=\beta,i=1,2,\cdots,n$；

(2) 由于 τ 是正交变换，所以 $\tau(\alpha_1),\tau(\alpha_2),\cdots,\tau(\alpha_n)$ 也是 V 的一个标准正交基，于是

$$V=L(\tau(\alpha_1))\oplus L(\tau(\alpha_2),\cdots,\tau(\alpha_n))=L(\beta_1)\oplus L(\tau(\alpha_2),\cdots,\tau(\alpha_n)),$$

由正交补的惟一性可得 $L(\tau(\alpha_2),\cdots,\tau(\alpha_n))=L(\beta_2,\cdots,\beta_n)$.

例 20　证明：第二类正交变换一定有特征值 -1.

证明　设 σ 是 $n(n>0)$ 维欧氏空间 V 的一个第二类正交变换，A 是 σ 在 V 的某一组标准正交基下的矩阵，则 $|A|=-1$.

设 $f(\lambda)=|\lambda I-A|$，则 $f(-1)=|(-1)I-A|=|-I-A|=(-1)^n|I+A|$. 但是，由于 $A'A=I$，所以 $(-1)^n|I+A|=(-1)^n|A'A+A|=(-1)^n|A'+I||A|=(-1)^{n+1}|A+I|$，因而 $|I+A|=0$，$f(-1)=0$，即 -1 为 σ 的特征值.

例 21　设 V 为 n 维欧氏空间，σ 为 V 的一个正交变换. 令

$$V_1=\{\alpha\mid\sigma(\alpha)=\alpha\},V_2=\{\alpha-\sigma(\alpha)\mid\alpha\in V\}$$

为 V 的子空间. 试证：$V=V_1\oplus V_2$.

证明　$\forall\alpha\in V_1\cap V_2,\alpha\in V_1,\alpha\in V_2$，于是 $\alpha=\sigma(\alpha),\alpha=(\iota-\sigma)\beta$，则

$$\begin{aligned}\langle\alpha,\alpha\rangle&=\langle\alpha,\beta-\sigma(\beta)\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle-\langle\alpha,\sigma(\beta)\rangle\\&=\langle\alpha,\beta\rangle-\langle\sigma(\alpha),\alpha(\beta)\rangle=0.\end{aligned}$$

故 $\alpha=0$，即 $V_1\cap V_2=\{0\}$.

$V_1=\{\alpha\mid\sigma(\alpha)=\alpha\}=\{\alpha\mid(\iota-\sigma)\alpha=0\}=\mathrm{Ker}(\iota-\sigma)$；

而 $V_2=\{(\iota-\sigma)\alpha\mid\alpha\in V\}=\mathrm{Im}(\iota-\sigma)$，其中 ι 为恒等变换.

因 $\dim\mathrm{Im}(\iota-\sigma)+\dim\mathrm{Ker}(\iota-\sigma)=n$，所以由 $V_1\cap V_2=\{0\}$ 及 V_1

$+V_2 \subseteq V$ 得 $V_1+V_2=V$,进而 $V_1 \oplus V_2=V$.

2. **对称变换**

利用对称变换的定义及性质,也要注意对称变换与实对称矩阵之间的对应关系,在很多情况下,要经过互相转换才便利于证明.

例22　设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的一个线性变换,σ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的矩阵为 A,证明 σ 为对称变换的充要条件为 $A'G=GA$,其中 G 为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的度量矩阵.

证明　设 $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n,\beta=y_1\alpha_1+y_2\alpha_2+\cdots+y_n\alpha_n$ 为 V 中任意两个向量,则

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle y_j=X'GY,$$

其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)',Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$,由条件知

$$\sigma(\alpha)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)AX,\sigma(\beta)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)AY.$$

故

$$\langle\sigma(\alpha),\beta\rangle=(AX)'GY=X'A'GY$$
$$\langle\alpha,\sigma(\beta)\rangle=X'G(AY)=X'GAY.$$

于是 σ 为对称变换的充要条件为 $A'G=GA$.

例23　设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的一个线性变换,证明 σ 是对称变换的充要条件是 σ 有 n 个两两正交的特征向量.

证明　必要性. 因为 σ 为对称变换,由定理知存在 V 的一个标准正交基 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$,使得 σ 关于此基的矩阵为对角形式,即

$$\sigma(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{pmatrix}.$$

即 $\sigma(\varepsilon_i)=\lambda_i\varepsilon_i(i=1,2,\cdots,n)$,所以 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 都是 σ 的特征向量,又因它们两两正交,故 σ 有 n 个两两正交的特征向量.

充分性. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为 σ 的 n 个两两正交的特征向量,它们分别属于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,即

$$\sigma(\alpha_i)=\lambda_i\alpha_i,i=1,2,\cdots,n.$$

令 $\varepsilon_i = \frac{\alpha_i}{|\alpha_i|}, i = 1,2,\cdots,n$，则 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一组标准正交基，由于

$$\sigma(\varepsilon_i) = \frac{1}{|\alpha_i|}\sigma(\alpha_i) = \frac{\lambda_i}{|\alpha_i|}\alpha_i = \lambda_i\left(\frac{\alpha_i}{|\alpha_i|}\right) = \lambda_i\varepsilon_i, i = 1,2,\cdots,n.$$

所以 σ 关于标准正交基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 的矩阵为实对角矩阵，从而也是实对称矩阵，故 σ 是对称变换.

例 24 已知 $\mathrm{R}^{2\times2}$ 的线性变换

$$\sigma\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 - x_4 & x_1 - x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + x_4 & -x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}, \forall \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^{2\times2}.$$

证明：σ 是对称变换.

证明 取 $\mathrm{R}^{2\times2}$ 的标准正交基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$，可求得 σ 在该基下的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由于 A 是实对称矩阵，所以 σ 是对称变换.

7.3.7 欧氏空间的同构

证明欧氏空间同构可以按照定义，即在两个欧氏空间之间建立同构映射；也可证明它们的维数相同.

例 25 设 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\},\{\beta_1,\cdots,\beta_m\}$ 为 n 维欧氏空间 V 的两组向量. 证明：若 $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle = \langle\beta_i,\beta_j\rangle, i,j = 1,\cdots,m$，则 $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 与 $L(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ 同构.

证明 欲证 $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 与 $L(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ 同构，只须证它们维数相等，等价于这两向量组的秩相等，为此，令 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_r\}$ 为 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_m\}$ 的一个极大无关组，r 为其秩. $1 \leqslant r \leqslant m$，则

$$|G(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)| = \begin{vmatrix} \langle\alpha_1,\alpha_1\rangle & \cdots & \langle\alpha_1,\alpha_r\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle\alpha_r,\alpha_1\rangle & \cdots & \langle\alpha_r,\alpha_r\rangle \end{vmatrix} \neq 0.$$

由于 $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \beta_i, \beta_j \rangle, i,j = 1,\cdots,m$，推知 $|G(\beta_1,\cdots,\beta_r)| \neq 0$，进而 $\beta_1,\cdots,\beta_r$ 线性无关. 因此 $\dim L(\beta_1,\cdots,\beta_m) \geqslant r$. 即 $\dim L(\beta_1,\cdots,\beta_m) \geqslant \dim L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$.

同理可证 $\dim L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m) \geqslant \dim L(\beta_1,\cdots,\beta_m)$，所以 $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$ 与 $L(\beta_1,\cdots,\beta_m)$ 的维数相等，因此它们同构.

例 26　设 σ,τ 为 n 维欧氏空间 V 的线性变换. $\forall \alpha \in V$，都有

$$\langle \sigma(\alpha), \sigma(\alpha) \rangle = \langle \tau(\alpha), \tau(\alpha) \rangle.$$

证明：$\mathrm{Im}(\sigma)$ 与 $\mathrm{Im}(\tau)$ 同构.

证明　欲证 $\mathrm{Im}(\sigma)$ 与 $\mathrm{Im}(\tau)$ 同构，我们将采用建立同构映射的方法，为此首先规定

$$f: \sigma(\alpha) \to \tau(\alpha), \forall \alpha \in V.$$

易证 f 是 $\mathrm{Im}(\sigma)$ 到 $\mathrm{Im}(\tau)$ 的一个双射.

其次 f 保持齐次可加性（即运算）. 事实上，$\forall \sigma(\alpha), \sigma(\beta) \in \mathrm{Im}(\sigma)$，$\forall a \in \mathrm{R}$，有

$$f(\sigma(\alpha) + \sigma(\beta)) = f(\sigma(\alpha+\beta)) = \tau(\alpha+\beta)$$
$$= \tau(\alpha) + \tau(\beta) = f(\sigma(\alpha)) + f(\sigma(\beta)).$$

$$f(a\sigma(\alpha)) = f(\sigma(a\alpha)) = \tau(a\alpha) = a\tau(\alpha) = af(\sigma(\alpha)).$$

最后 f 保持内积，$\forall \sigma(\alpha), \sigma(\beta) \in \mathrm{Im}(\sigma)$，由

$$\langle \sigma(\alpha+\beta), \sigma(\alpha+\beta) \rangle = \langle \sigma(\alpha), \sigma(\alpha) \rangle + \langle \sigma(\beta), \sigma(\beta) \rangle + 2\langle \sigma(\alpha), \sigma(\beta) \rangle,$$
$$\langle \tau(\alpha+\beta), \tau(\alpha+\beta) \rangle = \langle \tau(\alpha), \tau(\alpha) \rangle + \langle \tau(\beta), \tau(\beta) \rangle + 2\langle \tau(\alpha), \tau(\beta) \rangle,$$

有 $\langle \sigma(\alpha), \sigma(\beta) \rangle = \langle \tau(\alpha), \tau(\beta) \rangle = \langle f(\sigma(\alpha)), f(\sigma(\beta)) \rangle$，故 f 是 $\mathrm{Im}(\sigma)$ 与 $\mathrm{Im}(\tau)$ 间的一个同构映射，所以它们同构.

7.4　练习题及答案

7.4.1　练习题

1. 设 $A = (a_{ij})$ 是一个 n 阶正定矩阵，而 $\alpha = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\beta = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，在 R^n 中定义 $< \alpha, \beta > = \alpha A \beta'$.（1）证明在这个定义之下，$\mathrm{R}^n$ 成一欧氏空间；（2）求单位向量 $\varepsilon_1 = (1,0,\cdots,0)$，$\varepsilon_2 = (0,1,0,\cdots,0)$，$\cdots$，$\varepsilon_n = (0,\cdots,0,1)$ 的度量矩阵.

2. 在 R^n 中，设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，如下定义的二元实函数是否构成内积：

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i\Big)\Big(\sum_{j=1}^{n}b_j\Big).$$

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是欧氏空间 V 的 n 个向量，行列式

$$G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=\begin{vmatrix}\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_1,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_1,\alpha_n\rangle\\ \langle\alpha_2,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_2,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_2,\alpha_n\rangle\\ \cdots & & & \\ \langle\alpha_n,\alpha_1\rangle & \langle\alpha_n,\alpha_2\rangle & \cdots & \langle\alpha_n,\alpha_n\rangle\end{vmatrix}$$

叫做 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的格兰姆行列式，证明 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\neq 0$ 的充要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

4. 在向量空间 R^2 按某种内积构成的欧氏空间 V 中，已知其两组基为（Ⅰ）：$\alpha_1=(1,1)$，$\alpha_2=(1,-1)$；（Ⅱ）：$\beta_1=(0,2)$，$\beta_2=(6,12)$，且 $\langle\alpha_1,\beta_1\rangle=1$，$\langle\alpha_1,\beta_2\rangle=15$，$\langle\alpha_2,\beta_1\rangle=-1$，$\langle\alpha_2,\beta_2\rangle=3$，分别求基（Ⅰ）与基（Ⅱ）的度量矩阵.

5. 在 2 维欧氏空间中，设基 $\varepsilon_1=(1,0)$，$\varepsilon_2=(0,1)$ 的度量矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$，求 V 的一组标准正交基.

6. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$ 是 5 维欧氏空间 V 的一组标准正交基，$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，其中 $\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_5$，$\alpha_2=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_4$，$\alpha_3=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$，求 V_1 的一组标准正交基.

7. 设 A 是 n 阶反对称矩阵，$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 n 维欧氏空间 R^n（内积按通常定义）的任意一向量，$\beta=\alpha A$，证明 α 与 β 正交.

8. 在欧氏空间 R^3（内积按通常定义）中，子空间 $W=L(\alpha_1,\alpha_2)$，$\alpha_1=(1,2,0)$，$\alpha_2=(2,-1,0)$，求 $W^{\perp}$.

9. W 是欧氏空间 R^4（内积按通常定义）的一个子空间，且 W 是下列线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3-x_4=0\\ 3x_1+2x_2-2x_4=0\\ 3x_1+x_2+9x_3-x_4=0\end{cases}$$

的解空间,求 $W^{\perp}$.

10. 若 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是 n 维欧氏空间 V 中的一个标准正交组,而 $m < n$,则必有 $\beta \in V$,使 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m,\beta$ 仍为标准正交向量组.

11. 欧氏空间 $F[t]_3$ 的内积为 $\langle f(t),g(t)\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t, \forall f(t), g(t) \in F[t]_3$,已知子空间 $W = L(f_1(t))$,其中 $f_1(t) = t$,求 $W^{\perp}$ 的一组标准正交基.

12. 求正交矩阵 T,使 $T'AT$ 成对角形,其中 A 为

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$;　(2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$;

(3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;　(4) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

13. 对于 R^n 的线性变换 $\sigma(X) = AX(\forall X \in \mathrm{R}^n, A \in \mathrm{R}^{n\times n}$ 取定) 证明:(1)若 A 是正交矩阵,则 σ 是正交变换;(2)若 A 是对称矩阵,则 σ 是对称变换.

14. 设 ξ 是欧氏空间 V 的一个单位向量,对 $\forall \alpha \in V$,规定

$$\sigma(\alpha) = \alpha - 2\langle \xi,\alpha\rangle \xi.$$

证明:(1) σ 是正交变换(此时称 σ 为由向量 ξ 决定的镜面反射,简称 σ 为镜面反射);

(2)设 V 为 n 维欧氏空间,若正交变换 σ 有特征根 1,且属于特征根 1 的特征子空间 V_1 的维数为 $n-1$,则 σ 必为镜面反射.

15. 设 σ 是 n 维欧氏空间 V 的一个对称变换,且 $\sigma^2 = \sigma$,证明存在 V 的一个标准正交基,使得 σ 关于这个基的矩阵有形状

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

16. 设 A,B 均为 n 阶实对称矩阵，且 A 为正定矩阵，证明：存在 n 阶实可逆矩阵 T，使 $T'AT,T'BT$ 同时为对角形矩阵.

17. 设 $\alpha_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})(i=1,\cdots,n)$ 为 n 维欧氏空间 R^n 的 n 个向量，G 为 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 的 Gram 矩阵，$A=(a_{ij})_n$. 试证：分别以 n 阶方阵 G，A 为系数阵的齐次方程组 $GX=0$ 与 $AX=0$ 的解空间同构.

18. 设 α 为欧氏空间 V 的一个非零向量，$\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in V$，满足下列条件：

(1) $\langle\alpha_i,\alpha\rangle>0,i=1,\cdots,m$;(2) $\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle\leqslant 0,i,j=1,\cdots,m,i\neq j$.
试证：$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

19. 设 V 是一 n 维欧氏空间，$\alpha\neq 0$ 是 V 中一固定向量. 证明：

(1) $V_1=\{x\mid\langle x,\alpha\rangle=0,x\in V\}$ 是 V 的一个子空间.

(2) V_1 的维数等于 $n-1$.

20. 证明：向量 $\beta\in V_1$ 是向量 α 在子空间 V_1 上的内射影的充分必要条件是：对 $\forall\xi\in V_1$，$|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha-\xi|$.

7.4.2　练习题答案

1. (1)　① $\langle\alpha,\beta\rangle=\alpha A\beta'=\beta A'\alpha'=\beta A\alpha'=\langle\beta,\alpha\rangle$

② $\langle k\alpha,\beta\rangle=(k\alpha)A\beta'=k(\alpha A\beta')=k\langle\alpha,\beta\rangle$

③ $\langle\alpha+\beta,\gamma\rangle=(\alpha+\beta)A\gamma'=\alpha A\gamma'+\beta A\gamma'=\langle\alpha,\gamma\rangle+\langle\beta,\gamma\rangle$

④ $\langle\alpha,\alpha\rangle=\alpha A\alpha'=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$

由于 A 是正定矩阵，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\geqslant 0$，当且仅当 $\alpha=0$ 时，$\langle\alpha,\alpha\rangle=0$，故 R^n 成一欧氏空间.

(2) 设所求度量矩阵为 $B=(b_{ij})_{n\times n}$，则 $b_{ij}=\langle\varepsilon_i,\varepsilon_j\rangle=\varepsilon_iA\varepsilon'_j=a_{ij}$，从而 $B=A$.

2. 取 $\alpha=(1,-1,0,\cdots,0)\neq 0$，有 $\langle\alpha,\alpha\rangle=(\sum\limits_{i=1}^{n}a_i)^2=0$，所以 $\langle\alpha,\beta\rangle$ 不是 R^n 的内积.

3. 设有 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$，分别用 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$ 对上式两端作内积，得

$$k_1\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle+k_2\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle+\cdots+k_n\langle\alpha_1,\alpha_n\rangle=0,$$
$$k_1\langle\alpha_2,\alpha_1\rangle+k_2\langle\alpha_2,\alpha_2\rangle+\cdots+k_n\langle\alpha_2,\alpha_n\rangle=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$k_1\langle\alpha_n,\alpha_1\rangle+k_2\langle\alpha_n,\alpha_2\rangle+\cdots+k_n\langle\alpha_n,\alpha_n\rangle=0,$$

可见上述齐次线性方程组的系数行列式恰为 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，所以由方程组理论知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关的充要条件是 $G(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\neq 0$，即得证.

4. 可求得 $\alpha_1=-\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{6}\beta_2,\alpha_2=-\frac{3}{2}\beta_1+\frac{1}{6}\beta_2$，于是

$$\langle\alpha_1,\alpha_1\rangle=\langle\alpha_1,-\frac{1}{2}\beta_1+\frac{1}{6}\beta_2\rangle=2$$

$$\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle=\langle\alpha_1,-\frac{3}{2}\beta_1+\frac{1}{6}\beta_2\rangle=1$$

$$\langle\alpha_2,\alpha_2\rangle=\langle\alpha_2,-\frac{3}{2}\beta_1+\frac{1}{6}\beta_2\rangle=2.$$

从而基(Ⅰ)的度量矩阵为 $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$. 又由

$$\langle\beta_1,\beta_2\rangle=\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle\begin{pmatrix}1&9\\-1&-3\end{pmatrix}=\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle C$$

得基(Ⅱ)的度量矩阵为 $B=C'AC=\begin{pmatrix}2&12\\12&126\end{pmatrix}$.

5. 由 $\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$，故以 $C=\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}$ 为过渡矩阵，得基

$$(\eta_1,\eta_2)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}.$$

即 $\eta_1=\varepsilon_1=(1,0),\eta_2=-\varepsilon_1+\varepsilon_2=(-1,1)$ 就是 V 的一组标准正交基.

6. 首先不难证明 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是线性无关的. 将它们正交化得

$$\beta_1=\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_5,$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{\langle\alpha_2,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1=\frac{1}{2}\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_4-\frac{1}{2}\varepsilon_5,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{\langle\alpha_3,\beta_1\rangle}{\langle\beta_1,\beta_1\rangle}\beta_1-\frac{\langle\alpha_3,\beta_2\rangle}{\langle\beta_2,\beta_2\rangle}\beta_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_5,$$

单位化得

$$\eta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_5),\eta_2=\frac{\sqrt{10}}{10}(\varepsilon_1-2\varepsilon_2+2\varepsilon_4-\varepsilon_5),$$

$$\eta_3=\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_5).$$

则 η_1,η_2,η_3 就是 V_1 的一组标准正交基.

7. 因为 $\langle\alpha,\beta\rangle=\alpha\beta'=\alpha(\alpha A)'=\alpha(-A\alpha')=-\alpha A\alpha'$,$\langle\beta,\alpha\rangle=\beta\alpha'=\alpha A\alpha'$,所以$\langle\alpha,\beta\rangle=-\langle\beta,\alpha\rangle=-\langle\alpha,\beta\rangle$. 因此$\langle\alpha,\beta\rangle=0$,$\alpha$与$\beta$正交.

8. 因为 $\langle\alpha_1,\alpha_2\rangle=0$,所以 α_1,α_2 是 W 一组正交基,扩充为 R^3 的一正交基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$,其中 $\alpha_3=(0,0,1)$,则 $W^\perp=L(\alpha_3)$.

9. 求得所给线性方程组的系数矩阵的秩为2,所以 $\dim W=2$,从而,求得 W 的一组基 $\alpha_1=(-6,9,1,0)$,$\alpha_2=(0,1,0,1)$. 设 $\beta=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 是 $W^\perp$ 中的任意向量,则有 $\langle\beta,\alpha_1\rangle=\langle\beta,\alpha_2\rangle=0$,解 $\begin{cases}-6x_1+9x_2+x_3=0\\x_2+x_4=0\end{cases}$ 得一基础解系 $\beta_1=(1,0,6,0)$,$\beta_2=(0,-1,9,1)$,因此,$W^\perp=L(\beta_1,\beta_2)$.

10. 令 $W=L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)$,$W$ 在 V 中的正交补为 $W^\perp$,于是维 $W^\perp=$ 维 $V-$ 维 $W=n-m>0$,故有非零向量 $\eta\in W^\perp$,令 $\beta=\frac{\eta}{|\eta|}$,则 β 是单位向量,且仍属于 $W^\perp$,从而 β 与 W 正交,因此 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m,\beta$ 是标准正交组.

11. 设 $g(t)=k_0+k_1t+k_2t^2\in W^\perp$,则有

$$\langle f_1(t),g(t)\rangle=\int_{-1}^{1}f_1(t)g(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}t(k_0+k_1t+k_2t^2)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}k_1=0.$$

于是可得 $W^\perp=\{g(t)=k_0+k_2t^2\mid k_0,k_2\in\mathrm{R}\}$. 取 $W^\perp$ 的基 $1,t^2$,并正交化得

$$g_1(t) = 1,$$

$$g_2(t) = t^2 - \frac{\langle t^2, g_1(t)\rangle}{\langle g_1(t), g_1(t)\rangle} g_1(t) = t^2 - \frac{\int_{-1}^{1} t^2 \mathrm{d}t}{\int_{-1}^{1} 1 \mathrm{d}t} \cdot 1 = t^2 - \frac{1}{3}.$$

又 $\langle g_1(t), g_1(t)\rangle = \int_{-1}^{1} g_1^2(t)\mathrm{d}t = 2, \langle g_2(t), g_2(t)\rangle = \int_{-1}^{1} (t^2 - \frac{1}{3})^2 \mathrm{d}t = \frac{8}{45}$,故 $W^\perp$ 的一个标准正交基为

$$h_1(t) = \frac{1}{|g_1(t)|} g_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$h_2(t) = \frac{1}{|g_2(t)|} g_2(t) = \frac{\sqrt{10}}{4}(3t^2 - 1).$$

12. (1) $|\lambda I - A| = (\lambda - 1)(\lambda - 4)(\lambda + 2)$,所以特征值为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = -2$. 可求得对应的特征向量为 $\alpha_1 = (-2, -1, 2), \alpha_2 = (2, -2, 1), \alpha_3 = (1, 2, 2)$,单位化得

$$\eta_1 = (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}), \eta_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), \eta_3 = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}).$$

故正交矩阵 $T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$,满足 $T'AT = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$.

(2) 正交矩阵

$$T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \text{使 } T'AT = \begin{pmatrix} 10 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) 正交矩阵

$$T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{使 } T'AT = \begin{pmatrix} 5 & & & \\ & -5 & & \\ & & 3 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}.$$

(4)正交矩阵

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{6}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{6}\\ \frac{1}{2} & 0 & \sqrt{\frac{2}{3}} & -\frac{\sqrt{3}}{6}\\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}, \text{使 } T'AT=\begin{pmatrix}4 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0\end{pmatrix}.$$

13. 对任意 $X,Y\in \mathrm{R}^n$,当 A 是正交矩阵时,有

$$\langle\sigma(X),\sigma(Y)\rangle=\langle AX,AY\rangle=(AX)'(AY)=X'(A'A)Y=X'Y=\langle X,Y\rangle,$$

可见 σ 是正交变换. 而当 A 是对称矩阵时,有

$$\langle\sigma(X),Y\rangle=\langle AX,Y\rangle=(AX)'Y=X'A'Y=X'AY=\langle X,AY\rangle=\langle X,\sigma(Y)\rangle.$$

故 σ 是对称变换.

14. (1) $\forall \alpha,\beta\in V,\forall k\in \mathrm{R},\sigma(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)-2\langle\xi,\alpha+\beta\rangle\xi$

$$=(\alpha-2\langle\xi,\alpha\rangle\xi)+(\beta-2\langle\xi,\beta\rangle\xi)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),$$

$$\sigma(k\alpha)=k\alpha-2\langle\xi,k\alpha\rangle\xi=k(\alpha-2\langle\xi,\alpha\rangle\xi)=k\sigma(\alpha),$$

故 σ 为线性变换. 又因为

$$\langle\sigma(\alpha),\sigma(\beta)\rangle=\langle\alpha-2\langle\xi,\alpha\rangle\xi,\beta-2\langle\xi,\beta\rangle\xi\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle-2\langle\xi,\alpha\rangle\langle\xi,\beta\rangle$$
$$-2\langle\xi,\beta\rangle\langle\xi,\alpha\rangle+4\langle\xi,\alpha\rangle\langle\xi,\beta\rangle\langle\xi,\xi\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle,$$

故 σ 为正交变换.

(2)令 $e_1,\cdots,e_{n-1}$ 为 V_1 的一组标准正交基,对此再扩充为 V 的一个标准正交基 $e_1,\cdots,e_{n-1},e_n$. 设 $\sigma(e_n)=k_1e_1+\cdots+k_{n-1}e_{n-1}+k_ne_n$,其中 $k_i(i=1,\cdots,)$ 均为实数. 由于 $e_1,\cdots,e_{n-1}\in V_1$,因此 $\sigma(e_i)=e_i,i=1,\cdots,n-1$. 这样正交变换 σ 关于标准正交基 $e_1,\cdots,e_n$ 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & & & k_1\\ & \ddots & & \vdots\\ & & 1 & k_{n-1}\\ & & & k_n\end{pmatrix},$$

故 A 为正交阵,从而 $k_i=0,i=1,\cdots,n-1,k_n=\pm 1$. 又因 V_1 是 σ 的属

于特征根1的$n-1$维特征子空间,得$e_n \notin V_1$,故只有$k_n=-1$,即$\sigma(e_n)=-e_n$.这样对V中任意向量α,都有

$$\alpha = x_1e_1 + \cdots + x_{n-1}e_{n-1} + x_ne_n$$

$$\sigma(\alpha) = x_1\sigma(e_1) + \cdots + x_{n-1}\sigma(e_{n-1}) + x_n\sigma(e_n) = x_1e_1 + \cdots + x_{n-1}e_{n-1} - x_ne_n$$
$$= (x_1e_1 + \cdots + x_{n-1}e_{n-1} + x_ne_n) - 2x_ne_n = \alpha - 2\langle\alpha, e_n\rangle e_n.$$

故σ是由单位向量e_n决定的镜面反射,即σ为镜面反射.

15. 首先证明σ的特征根只能为0,1,设λ为σ的任意一特征根,ξ是σ的属于特征根λ的特征向量,所以$\sigma(\xi)=\lambda\xi$,由于$\sigma^2=\sigma$,故$\sigma^2(\xi)=\sigma(\xi)$,于是有$\lambda^2(\xi)=\lambda\xi$,即$(\lambda^2-\lambda)\xi=0$,又因$\xi\neq 0$,必有$\lambda^2-\lambda=0$,从而$\lambda=0$或$\lambda=1$.

由定理知存在V的一组标准正交基$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$,使$\sigma$关于此基的矩阵为对角形式,显然此时$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$是$V$的$n$个特征向量,于是对角形矩阵的对角线上的元素只能是$\sigma$的特征根,即只能为0,1,适当交换$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$的顺序(使属于1的特征向量放在前面,属于0的特征向量放在后面),不妨设交换后的基仍为$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$.则$\sigma$关于此基的矩阵为形状

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

16. 由于A为n阶正定矩阵,所以有n阶实可逆矩阵P,使$P'AP=I$.对于实对称矩阵$P'BP$,存在正交矩阵Q,使$Q'(P'BP)Q$为对角形矩阵.记$T=PQ$,则T为实可逆矩阵,且$T'AT=Q'(P'AP)Q=Q'IQ=I$,$T'BT=Q'(P'BP)Q$均为对角形矩阵.

17. 欲证$GX=0$与$AX=0$的解空间同构,等价于它们的解空间维数相等,因此只须证系数阵G与A的秩相等即可.

由于$G=(\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle)_n$,而由$n$维欧氏空间$\mathrm{R}^n$的内积定义知$\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$,由此即得$G=AA'$,于是秩$A=$秩$AA'=$秩$G$.故它们解空

间的维数相等,进而同构.

18. $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关只须证当 $x_1\alpha_1+\cdots+x_m\alpha_m=0$ 时,$x_1,\cdots,x_m$ 全为零. 对此我们总可将这 m 个实数按正、负或零重新排序,使

$$x_1,\cdots,x_r\geqslant 0;x_{r+1},\cdots,x_m\leqslant 0.\ (1\leqslant r\leqslant m) \qquad (*)$$

令
$$\xi=\sum_{i=1}^{r}x_i\alpha_i=-\sum_{j=r+1}^{m}x_j\alpha_j,$$
则
$$\langle\xi,\xi\rangle=\langle\sum_{i=1}^{r}x_i\alpha_i-\sum_{j=r+1}^{m}x_j\alpha_j\rangle=-\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=r+1}^{m}x_ix_j\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle\leqslant 0.$$
由内积性质 $\langle\xi,\xi\rangle\geqslant 0$,必有$\langle\xi,\xi\rangle=0$,即得 $\xi=0$,进而
$$\sum_{i=1}^{r}x_i\alpha_i=0,\sum_{j=r+1}^{m}x_j\alpha_j=0.$$
于是
$$\langle\sum_{i=1}^{r}x_i\alpha_i,\alpha\rangle=\sum_{i=1}^{r}x_i\langle\alpha_i,\alpha\rangle=0,\ \langle\sum_{j=r+1}^{m}x_j\alpha_j,\alpha\rangle=\sum_{j=r+1}^{m}x_j\langle\alpha_j,\alpha\rangle=0,$$
故由(*) 即知 $x_i\langle\alpha_i,\alpha\rangle=0,x_j\langle\alpha_j,\alpha\rangle=0$, 从而有
$$x_i=x_j=0,i=1,\cdots,r,j=r+1,\cdots,m.$$
因此 $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

19. (1)由于$0\in V_1$,所以 V_1 非空. 对任意 $x_1,x_2\in V_1,k\in\mathrm{R}$,有
$$\langle x_1+x_2,\alpha\rangle=\langle x_1,\alpha\rangle+\langle x_2,\alpha\rangle=0,\langle kx_1,\alpha\rangle=k\langle x_1,\alpha\rangle=0.$$
从而 $x_1+x_2\in V_1,kx_1\in V_1$,故 V_1 是 V 的一个子空间.

(2)由于 $\alpha\neq 0$ 是线性无关的,将它扩充为 V 的一组正交基 $\alpha,\eta_2,\cdots,\eta_n$,这时因为$\langle\eta_i,\alpha\rangle=0(i=2,\cdots,n)$,所以 $\eta_i\in V_1(i=2,\cdots,n)$.

对任意$\beta\in V_1$,有 $\beta=k_1\alpha+k_2\eta_2+\cdots+k_n\eta_n$,由于
$$0=\langle\beta,\alpha\rangle=k_1\langle\alpha,\alpha\rangle+k_2\langle\eta_2,\alpha\rangle+\cdots+k_n\langle\eta_n,\alpha\rangle=k_1\langle\alpha,\alpha\rangle,$$
由 $\langle\alpha,\alpha\rangle\neq 0$ 得 $k_1=0$,即 β 可由 $\eta_2,\cdots,\eta_n$ 线性表出,从而 $\eta_2,\cdots,\eta_n$ 是 V_1 的一组基,其维数为 $n-1$.

20. 必要性. 设 $\beta\in V_1$ 是 α 在 V_1 上的内射影,即 $\alpha=\beta+\gamma,\gamma\in V_1^{\perp}$,则 $\alpha-\beta\in V_1^{\perp}$. 即 $\alpha-\beta\perp V_1$. 因为向量到子空间各向量间的距离以垂线最短,所以,对任意 $\xi\in V_1$,有 $|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha-\xi|$.

充分性. 设 $\alpha=\beta_1+\gamma,\beta_1\in V_1,\gamma\in V_1^{\perp}$,即 β_1 是 α 在 V_1 上的内射影.

对于 $\beta\in V_1$,因为"垂线最短",所以 $|\alpha-\beta_1|\leqslant|\alpha-\beta|$. 另外由题设条件, $|\alpha-\beta|\leqslant|\alpha-\beta_1|$,所以 $|\alpha-\beta|=|\alpha-\beta_1|$,即

$$\langle\alpha-\beta,\alpha-\beta\rangle=\langle\alpha-\beta_1,\alpha-\beta_1\rangle,$$

又因为 $\alpha-\beta=\beta_1+\gamma-\beta=(\beta_1-\beta)+\gamma$,于是

$$\begin{aligned}\langle\alpha-\beta,\alpha-\beta\rangle&=\langle(\beta_1-\beta)+\gamma,(\beta_1-\beta)+\gamma\rangle\\&=\langle\beta_1-\beta,\beta_1-\beta\rangle+\langle\gamma,\gamma\rangle\\&=\langle\beta_1-\beta,\beta_1-\beta\rangle+\langle\alpha-\beta_1,\alpha-\beta_1\rangle\\&=\langle\beta_1-\beta,\beta_1-\beta\rangle+\langle\alpha-\beta,\alpha-\beta\rangle,\end{aligned}$$

故有 $\langle\beta_1-\beta,\beta_1-\beta\rangle=0$,即 $\beta_1=\beta$,可见 β 是 α 在 V_1 上的内射影.

第8章 二 次 型

二次型的理论起源于解析几何中化二次曲线和二次曲面方程为标准形式的问题. 现在二次型的理论不仅在几何而且在数学的其它分支及物理、力学、工程技术中也常常用到. 本章我们将应用所学过的矩阵的知识来讨论二次型的理论.

8.1 内容提要

8.1.1 二次型及其矩阵表示

1. 双线性函数

设 V 是数域 F 上一个 n 维向量空间. V 上一个**双线性函数**指的是一个映射 $f: V\times V\to F$, 即对于 V 中每一对向量 (ξ,η), 有 F 中一个确定的数 $f(\xi,\eta)$ 与它对应, 并且满足下列条件:

(1) $f(\xi+\eta,\zeta)=f(\xi,\zeta)+f(\eta,\zeta)$;

(2) $f(\xi,\eta+\zeta)=f(\xi,\eta)+f(\xi,\zeta)$;

(3) $f(a\xi,\zeta)=f(\xi,a\zeta)=af(\xi,\zeta)$.

这里 ξ,η,ζ 是 V 中任意向量, a 是 F 中任意数.

设 $f(\alpha,\beta)$ 为 $V_n(F)$ 的一个双线性函数, 若对 $\forall\beta\in V$, 都有 $f(\alpha,\beta)=0$, 可推出 $\alpha=0$, 则 f 称为**非退化的**.

设 $f(\alpha,\beta)$ 是 $V(F)$ 上一个双线性函数, 若对 $\forall\alpha,\beta\in V(F)$, 都有 $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$, 则称 $f(\alpha,\beta)$ 为**对称双线性函数**.

设 $f(\alpha,\beta)$ 为 $V(F)$ 上对称双线性函数, 当 $\alpha=\beta$ 时, V 上的函数 $f(\alpha,\alpha)$ 称为与 $f(\alpha,\beta)$ 关联的**二次齐次函数**.

设 $f(\alpha,\beta)$ 是 $V_n(F)$ 上一个双线性函数, $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一个基, 则矩阵

$$A=\begin{pmatrix} f(\varepsilon_1,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_1,\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_1,\varepsilon_n)\\ f(\varepsilon_2,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_2,\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_2,\varepsilon_n)\\ \cdots & & & \\ f(\varepsilon_n,\varepsilon_1) & f(\varepsilon_n,\varepsilon_2) & \cdots & f(\varepsilon_n,\varepsilon_n)\end{pmatrix}.$$

称为$f(\alpha,\beta)$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的度量矩阵.

在给定的基下,数域 F 上 n 维向量空间 V 上全体双线性函数与 $M_n(F)$ 之间有一个一一对应.

在不同基下, $V_n(F)$ 上同一个双线性函数$f(\alpha,\beta)$ 的度量矩阵彼此是合同的,即若 A 为$f(\alpha,\beta)$ 在基$\{\alpha_i \mid i=1,\cdots,n\}$ 下的度量阵,B 为$f(\alpha,\beta)$ 在基$\{\beta_i \mid i=1,\cdots,n\}$ 下的度量阵,而 T 是由基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的过渡阵,则 $B=T'AT$.

双线性函数$f(\alpha,\beta)$ 非退化的充要条件是$f(\alpha,\beta)$ 在基$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$下的度量阵是可逆的.

双线性函数是对称的,当且仅当它在任意一基下的度量矩阵是对称矩阵.

2. 二次型

设$f(\alpha,\beta)$ 为 $V_n(F)$ 上一个对称双线性函数,$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 $V_n(F)$ 一个基. A 为$f(\alpha,\beta)$ 在基 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 下的度量矩阵. $\forall\alpha\in V_n(F)$,$\alpha=\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$,有

$$f(\alpha,\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}f(\alpha_i,\alpha_j)x_ix_j=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix}\qquad(1)$$

其中 $A'=A$. (1) 式右端是 F 上 n 个文字 $x_1,\cdots,x_n$ 的一个二次齐次多项式,称它为 **F 上 n 个文字的二次型**,简称 **n 元二次型**.

一般形式为

$$\begin{aligned}q(x_1,\cdots,x_n)&=a_{11}x_1^2+\cdots+a_{nn}x_n^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{n-1n}x_{n-1}x_n\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X'AX,\end{aligned}$$

其中 $A=(a_{ij})=A',a_{ij}=a_{ji},i,j=1,\cdots,n,X=(x_1,\cdots,x_n)'$.

称 A 为 n 元二次型 $q(x_1,\cdots,x_n)$ 的矩阵.

二次型的秩指的是它的矩阵的秩.

3. 合同矩阵

设 A,B 是数域 F 上两个 n 阶矩阵,如果存在 F 上一个 n 阶可逆矩阵

P,使得 $P'AP = B$,那么就说 **B 与 A 合同**.

合同矩阵具有如下性质:

(1)反身性:A 与 A 合同;

(2)对称性:若 A 与 B 合同,则 B 与 A 合同;

(3)传递性:若 A 与 B 合同,B 与 C 合同,则 A 与 C 合同;

(4)若 A 与 B 合同,则 A 的秩与 B 的秩相等.

设 F 是一个数域,$c_{ij} \in F$,两组文字 $x_1,\cdots,x_n;y_1,\cdots,y_n$ 的关系式

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n \\ \cdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n \end{cases}.$$

称为由 $x_1,\cdots,x_n$ 到 $y_1,\cdots,y_n$ 的一个**线性替换**.用矩阵形式可写为

$$X = CY,$$

其中 $X = (x_1,x_2,\cdots,x_n)',C = (c_{ij})_{n\times n},Y = (y_1,y_2,\cdots,y_n)'$.当 $|C| \neq 0$ 时,称**线性替换是非退化的**(或可逆的,或满秩的).

数域 F 上的两个二次型等价(指的是可以通过可逆的变量替换互化),当且仅当它们的矩阵合同.

矩阵的下列任意一种变换皆为合同变换.

(1)以数 $k(\neq 0)$ 乘矩阵的 i 行后,又以 k 乘矩阵的 i 列.

(2)对调矩阵的 i 行与 j 行后,又对调矩阵的 i 列与 j 列.

(3)矩阵 j 行的 k 倍加到 i 行后,又把矩阵 j 列的 k 倍加到 i 列.矩阵 A 经过合同变换后,得到与 A 合同的矩阵.

8.1.2 二次型的标准形

若一个二次型能够经非退化线性替换化为平方和的形式,则称该平方和为该二次型的**标准形**.数域 F 上的任意一个 n 元二次型都可以经非退化线性替换化为其标准形.

数域 F 上秩为 r 的任意一个 n 阶对称矩阵 A 都合同于一个秩为 r 的对角矩阵 D,即存在可逆矩阵 C,使 $C'AC = D$,这里 D 的对角元素中有 r 个非零.

注 二次型的标准形一般不是惟一的,与对称矩阵合同的对角矩

阵一般不是惟一的.

化二次型为标准形的常用方法有两种:配方法,初等变换法.

配方法的步骤是:

(1)若$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中没有平方项(即平方项的系数全为零),而有x_ix_j的系数不为零,此时作非退化线性替换$x_i = y_i + y_j, x_j = y_i - y_j, x_k = y_k, k \neq i,j$,则出现平方项;

(2)若$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$中含有平方项x_i^2,则先集中含x_i的所有项,进行配方;

(3)对于剩下的$n-1$个文字,继续类似地进行,直至全化为平方项为止.

初等变换法的步骤是:

(1)写出$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的矩阵A;

(2)对A"对称地"进行行与列的初等变换,即,对行作一初等变换后,立即对列作一同样的初等变换,从而,将A化为对角形矩阵D;

(3)写出D对应的二次型,即为$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的标准形.

数域F上的任意一个二次型的标准形中非零平方项的个数是惟一确定的,等于它的秩,与所作的线性替换无关.

8.1.3　复二次型与实二次型

1. 复二次型

秩为r的复二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = X'AX$都可以经过复的非退化线性替换$X = CY$化为惟一的规范形$f = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2$.

秩为r的任意n阶复对称矩阵A在复数域上合同于惟一的n阶对角矩阵

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

即存在n阶复可逆矩阵C,使

$$C'AC = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

两个n元复二次型可通过复的非退化线性替换互化的充分必要条件是,二者有相同的秩. 从而,n元复二次型共有$n+1$个等价类.

两个 n 阶复对称矩阵在复数域上合同的充分必要条件是二者有相同的秩. 从而, n 阶复对称矩阵有 $n+1$ 个合同类.

2. 实二次型

惯性定律 秩为 r 的实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ 都可经过实的非退化线性替换 $X=CY$ 化为惟一的规范形

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2,$$

其中正项个数 p 及负项个数 $q=r-p$ 是确定的, 分别称为 f 的**正惯性指数**和**负惯性指数**; 二者的差 $p-q$ 称为 f 的**符号差**.

秩为 r 的 n 阶实对称矩阵 A 在实数域上合同于惟一的 n 阶对角矩阵

$$\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

即存在 n 阶实可逆矩阵 C, 使

$$C'AC=\begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

两个 n 元实二次型可通过实的非退化线性替换互化的充分必要条件是, 二者有相同的秩与符号差. 从而, n 元实二次型有 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 个等价类.

两个 n 阶实对称矩阵在实数域上合同的充分必要条件是, 二者有相同的秩与符号差(实对称矩阵 A 的符号差即指二次型 $X'AX$ 的符号差). 从而, n 阶实对称矩阵有 $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 个合同类.

8.1.4 正定二次型

设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为 n 元实二次型. 对于任意 n 个不全为零的实数 $c_1, c_2,\cdots,c_n$,

(1) 若都有 $f(c_1,\cdots,c_n)>0$, 则称 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为**正定二次型**.

(2) 若都有 $f(c_1,\cdots,c_n)<0$, 则称 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为**负定二次型**.

(3)若都有$f(c_1,\cdots,c_n)\geqslant 0$,则称$f(x_1,\cdots,x_n)$为半正定二次型.

(4)若都有$f(c_1,\cdots,c_n)\leqslant 0$,则称$f(x_1,\cdots,x_n)$为半负定二次型.

(5)若$f(x_1,\cdots,x_n)$既不是半正定,又不是半负定的,则称$f(x_1,\cdots,x_n)$为不定二次型.

设n元实二次型

$$q(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X'AX,$$

其中$X'=(x_1,\cdots,x_n)$,$A=(a_{ij})=A'$,$a_{ij}=a_{ji}$,$i,j=1,\cdots,n$,$q(x_1,\cdots,x_n)$是正定的,与下述诸命题彼此等价:

(1)它的秩与符号差都等于n;

(2)它的矩阵A合同于n阶单位阵I_n,即存在n阶可逆阵P使$P'AP=I_n$;

(3)它的矩阵A的一切顺序主子式都大于零;

(4)它的矩阵$A=Q'Q$,其中Q为n阶实可逆阵;

(5)它的矩阵A的特征值都是正数;

(6)它的矩阵$A=S^2$,其中S为正定阵.

相平行地,实二次型$f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$是半正定的,与下述诸命题等价:

(1)它的秩与正惯性指数相等,即$r=p$;

(2)它的矩阵A合同于$\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$;

(3)它的矩阵A的所有主子式全是非负数;

(4)它的矩阵$A=T'T$,其中T为$r\times n$行满秩阵;

(5)它的矩阵A的特征值都为非负数.

注　它的矩阵A的所有顺序主子式$\geqslant 0$,它未必是半正定的.

若实二次型$f(x_1,\cdots,x_n)=X'AX$正定,则称f的矩阵A是正定的.

正定矩阵有如下性质:

(1)正定矩阵的行列式恒为正;

(2)实对称矩阵A正定当且仅当A与单位矩阵合同;

(3)A是正定矩阵当且仅当A^{-1}是正定矩阵;

(4) 两个正定矩阵的和是正定矩阵.

8.1.5 主轴问题

设 n 元实二次型

$$q(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j=X'AX,$$

其中 $X'=(x_1,\cdots,x_n)$,$A=(a_{ij})=A'$,$a_{ij}=a_{ji}$,$i,j=1,\cdots,n$,则总可通过坐标的正交变换

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=U\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},$$

化为

$$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2, \qquad (*)$$

其中 U 为 n 阶正交阵,而 $\lambda_i\in\mathrm{R}$,$i=1,\cdots,n$ 是 A 的全部特征值. 这就是二次型的化主轴问题,即任意实二次型均可通过正交的变量替换化为标准形(*),由此即得:

(1) 二次型的秩是它的矩阵 A 的非零特征值的个数.

(2) 二次型的符号差是它的矩阵 A 的正特征值的个数与负特征值的个数的差.

8.2 重点和难点

本章的重点是:二次型的标准形,实二次型的规范形,正定二次型.

化二次型为标准形是最基本的问题,是讨论其它问题如规范形、正定性等的基础. 使对称矩阵合同于对角形,是与此等价的问题. 化二次型为标准形的常用方法有两种:配方法,初等变换法. 配方法直接化二次型为平方和,方法较为初等,容易掌握,只是计算过程较复杂,并且,求总的线性替换较麻烦. 初等变换法是通过求得与二次型的矩阵合同的对角形矩阵,间接地求得二次型的标准形. 两种方法各有利弊,互相补充. 总之,成为本章的一个重点.

实二次型的规范形,是在标准形的基础上求得的,由此引入了正惯

性指数等概念,进一步刻划了实二次型;同时,通过规范形,很方便地研究了实二次型的值类,给出了实二次型半正定、正定、半负定、负定、不定的必要充分条件,因此,成为本章的一个重点.

正定二次型与正定矩阵的判定与证明是本章的另一个重点. 对于具体的实二次型或实对称矩阵,一般采用全部顺序主子式大于零的充分必要条件来判定;而对于抽象的实二次型或实对称矩阵,往往采用定义及特征值等判定其正定性.

本章的难点是: n 阶实对称矩阵的合同类,正定二次型.

n 阶实对称矩阵的合同标准形的结构不容易想象,从而,确定合同类的类数及每类中的代表,就更为困难,因此,成为本章的一个难点. 解决困难的方法是:(1)由实二次型的规范形过渡到实对称矩阵的合同标准形,明确"先1再 -1 最后0"的结构;(2)明确同一类中的矩阵具有相同的合同标准形,该合同标准形就是该类的当然代表;(3)按照"一看秩二看1三看 -1"的顺序,考虑所有可能的代表,从而确定合同类的类数.

正定二次型既是本章的一个重点,又是本章的一个难点. 关于用顺序主子式判定正定的结论,其证明篇幅较长,而且证明充分性时,使用数学归纳法,还要进行技术上的处理;具体使用时,有些二次型的矩阵不易写出,顺序主子式不易计算,因此,成为本章的一个难点. 解决困难的方法是:(1)明确 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的正定性决定了 $f_k(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 的正定性;(2)复习分块矩阵及其转置,作好准备,从而理解对于归纳假定之下矩阵的技术性处理;(3)复习行列式的计算,为具体使用作准备.

8.3　例题解析

8.3.1　线性函数有关问题

1. 设 $V(F)$ 为数域 F 上向量空间. $f: V\to F$ 是一个映射,若 f 满足

(1) $f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta)$　(可加性);

(2) $f(k\alpha)=kf(\alpha)$ (齐次性),

其中 $\forall \alpha,\beta \in V(F)$，$\forall k \in F$，则称 f 为 V 上一个线性函数（映射）.

2. 设 $L(V,F)$ 为数域 F 上 n 维向量空间 V 的全体线性函数的集合. $L(V,F)$ 中定义加法：

$$(f+g)(\alpha) = f(\alpha) + g(\alpha), \forall \alpha \in V, \forall f,g \in L(V,F).$$

定义数量乘法：

$$(kf)(\alpha) = k(f(\alpha)), \forall k \in F, \forall \alpha \in V, \forall f \in L(V,F).$$

于是 $L(V,F)$ 对其加法与数量乘法构成的向量空间称为 V 的**对偶空间**，记为 V^*，即 $V^* = L(V,F)$.

3. 设 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 $V_n(F)$ 的一个基，由

$$f_i(\varepsilon_j) = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}, \quad i = 1,2,\cdots,n$$

构作的 V 上 n 个线性函数，便成为 V^* 的一个基，并称为 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的**对偶基**.

例 1　证明：对于 n 维向量空间 V 中任意两个不同的向量 α,β，必存在 V 上的线性函数 f，使 $f(\alpha) \neq f(\beta)$，即对 V 中任意非零向量 ξ，必有 $f \in V^*$，使 $f(\xi) \neq 0$.

证明　令 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 为 V 的一个基，而 $f_1,\cdots,f_n$ 为 V^* 的关于 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 的对偶基，则 $\forall \xi \in V$，有 $\xi = k_1\varepsilon_1 + \cdots + k_n\varepsilon_n$，使

$$f_i(\xi) = f_i(k_1\varepsilon_1 + \cdots + k_n\varepsilon_n) = k_i, i = 1,\cdots,n.$$

因此，由 $\xi \neq 0$ 可知，至少有一个 $k_r \neq 0, 1 \leqslant r \leqslant n$，所以 $f_r(\xi) = k_r \neq 0$. 于是设 $f = f_r$ 即为所求. 亦即对 $\forall \alpha,\beta \in V$ 且 $\alpha \neq \beta$，有 $\alpha - \beta \neq 0$，故 $f(\alpha-\beta) \neq 0$，进而 $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

例 2　设 V 为 F 上 n 维向量空间，$g_1,\cdots,g_m \in V^*$，$1 \leqslant m < n$，证明：必有向量 $\alpha \in V(\alpha \neq 0)$ 使 $g_i(\alpha) = 0, i = 1,\cdots,m$.

证明　设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为 V 的一个基. 令 $g_i(\alpha_j) = \alpha_{ij}, i = 1,2,\cdots,m$，$j = 1,2,\cdots,n$. 于是对于 V 中某一非零向量 $\alpha = k_1\alpha_1 + \cdots + k_n\alpha_n$，倘若 $g_i(\alpha) = k_1g_i(\alpha_1) + \cdots + k_ng_i(\alpha_n) = a_{i1}k_1 + \cdots + a_{in}k_n = 0, i = 1,2,\cdots,m$，则非零向量 α 的坐标 $k_1,\cdots,k_n$ 是齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

的一个非零解. 因此,由于 $m < n$,所以上述齐次线性方程组必有非零解,进而存在非零向量 α,使 $g_i(\alpha) = 0, i = 1,\cdots,m$.

8.3.2　二次型的标准形

化二次型为标准形的常用方法有两种:配方法,初等变换法. 具体的步骤如8.1.2中所述.

例3　化下列二次型为标准形,并写出所用的非退化线性替换:

(1) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$

(2) $f(x_1,x_2,x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

解　(1) **方法1**　用配方法.

$$\begin{aligned} f &= x_1^2 + 2x_1(x_2 + 2x_3) + 3x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= [x_1 + (x_2 + 2x_3)]^2 - (x_2 + 2x_3)^2 + 3x_3^2 + 2x_2x_3 \\ &= (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 - x_3^2 \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + 2x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$,　即 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 - 2y_3 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$,得

$$f = y_1^2 - y_2^2 - 2y_2y_3 - y_3^2 = y_1^2 - (y_2 + y_3)^2.$$

令 $\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_2 + y_3, \\ z_3 = y_3 \end{cases}$　即 $\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 - z_3, \\ y_3 = z_3 \end{cases}$　得

$$f = z_1^2 - z_2^2.$$

所用的非退化线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = z_1 - (z_2 - z_3) - 2z_3 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_2 = z_2 - z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

方法2　用初等变换法

二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,于是

$$\begin{pmatrix} A \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{r_2 - r_1 \\ r_3 - 2r_1}]{\substack{c_2 - c_1 \\ c_3 - 2c_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3 - r_2]{c_3 - c_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

故非退化线性替换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ 化二次型为 $f = y_1^2 - y_2^2$.

(2)**方法1**　用配方法

由于所给二次型没有平方项,故令 $\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 \\ x_2 = y_1 + y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 得

$$\begin{aligned} f &= (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) + (y_1 - y_2)y_3 + (y_1 + y_2)y_3 \\ &= y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2. \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$,　　即 $\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}$,得

$$f = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

所用的非退化线性替换为

$$\begin{cases} x_1 = (z_1 - z_3) - z_2 = z_1 - z_2 - z_3 \\ x_2 = (z_1 - z_3) + z_2 = z_1 + z_2 - z_3. \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

方法2　用初等变换法

二次型的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$,于是

$$\begin{pmatrix}A\\I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\\cdots&\cdots&\cdots\\1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1+r_2]{c_1+c_2}\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&1\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\1&\frac{1}{2}&0\\\cdots&\cdots&\cdots\\1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_2-\frac{1}{2}r_1\\r_3-r_1}]{\substack{c_2-\frac{1}{2}c_1\\c_3-c_1}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{4}&0\\0&0&-1\\\cdots&\cdots&\cdots\\1&-\frac{1}{2}&-1\\0&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\times 2]{c_2\times 2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\\\cdots&\cdots&\cdots\\1&-1&-1\\1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

故非退化线性替换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$，化二次型为 $f=y_1^2-y_2^2-y_3^2$.

注1　化二次型为标准形时，所作的非退化线性替换不惟一，标准形也不惟一.

注2　顺序主子式法（雅可比法）：若 n 元二次型的矩阵 A 所有阶数 $\leqslant n-1$ 的顺序主子式皆非零，即 $\Delta_k\neq 0, k=1,\cdots,n-1$，则这 n 元二次型的标准形为

$$\Delta_1 y_1^2+\frac{\Delta_2}{\Delta_1}y_2^2+\cdots+\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}y_n^2.$$

注3　化实二次型为标准形的另一重要方法是采用正交线性替换，其步骤如下：

(1)首先通过 n 元二次型的矩阵 A 的特征多项式,求出 A 的所有特征值 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$,于是二次型的标准形为 $\lambda_1 y_1^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$.

(2)对每一特征值 λ_i,求出属于它的单位特征向量 $\xi_i, i=1,\cdots,n$,其中若属于同一特征值的单位特征向量的数量多于 1 个,则需把它们正交化.

(3)最后求出变量正交替换 $X=PY$,其中 P 是正交矩阵,它的列向量是由矩阵 A 的所有特征值对应的正交单位特征向量构成.

8.3.3　矩阵的合同

关于矩阵合同方面的题目,证明的方法大体可归纳为两种:

(1)将对称矩阵合同的问题转化成二次型来处理;

(2)利用矩阵合同的自身的性质来解决.

例 4　证明:若 $i_1 i_2\cdots i_n$ 是一个 n 级排列,则下面两个矩阵合同,

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n}\end{pmatrix}.$$

证明　记

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}\lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n}\end{pmatrix}.$$

对于二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'BX=\lambda_{i_1}x_1^2+\lambda_{i_2}x_2^2+\cdots+\lambda_{i_n}x_n^2$,作非退化线性替换 $x_1=y_{i_1},\cdots,x_n=y_{i_n}$,则

$f=\lambda_{i_1}y_{i_1}^2+\lambda_{i_2}y_{i_2}^2+\cdots+\lambda_{i_n}y_{i_n}^2=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2=Y'AY$,

所以,两矩阵合同. 其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$,$Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$.

例 5　证明:设 A 为 n 阶实可逆矩阵. 若 A 与 $-A$ 在实数域上合同,则 n 必为偶数.

证明　因为,A 与 $-A$ 在实数域上合同,所以,存在实可逆矩阵 C,使得 $-A=C'AC$,取行列式得,$(-1)^n|A|=|-A|=|C'AC|=|A|$

$|C|^2$,又 A 是可逆矩阵,所以,$|C|^2=(-1)^n>0$. 因此,n 必为偶数.

例6　设 A 是 n 阶对称矩阵,A 的秩是 r,求证:存在秩为 $n-r$ 的对称矩阵 B 使 $AB=0$.

证明　据题设,可知 A 的合同标准形 D 是

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & & & \\ & d_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix},$$

$d_1,d_2,\cdots,d_r$ 都不等于零,则存在可逆矩阵 P 使 $P'AP=D$,对 D 来说,显然有秩为 $n-r$ 的矩阵

$$C=\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & c_{r+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & c_n \end{pmatrix},$$

$c_{r+1},c_{r+2},\cdots,c_n$ 都不等于零,使 $DC=0$,于是 $P'APC=0$,所以 $APC=0$,故 $APCP'=0$. 令 $PCP'=B$,因为 P 是可逆的,PCP' 与 C 的秩相等,而且 PCP' 是对称的,所以 B 是秩为 $n-r$ 的对称矩阵,而且使 $AB=0$.

注　这种将对称矩阵 A 转化为它的合同标准形来求解的方法是一种常用方法. 凡是要求证 n 阶对称矩阵 A 具有某种性质,而这种性质与 A 的秩有关时,我们大都可以使用这种方法,首先设出 A 的合同标准形 D,由于 D 是对角形矩阵,容易证明它具有所要求的性质,然后再通过 D 来证明 A 具有所要求的性质.

8.3.4　实数域和复数域上的二次型

1. 求二次型的规范形

求二次型的规范形，一般先求出标准形，而后再作一次适当的线性替换，求得规范形；由于复二次型的规范形是由二次型的秩所惟一决定，所以在实际计算中，如果不要求写所作的非退化线性代换，那么只需要求出二次型的秩，便可写出它的规范形.

例 7 用非退化线性代换将复二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$ 化为规范形.

解 先用非退化的线性代换

$$\begin{cases}x_1=y_1-y_2+3y_3\\x_2=y_1+y_2-y_3\\x_3=y_3\end{cases}.\tag{1}$$

将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=2y_1^2-2y_2^2+6y_3^2$ 再作非退化线性代换

$$\begin{cases}y_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\omega_1\\y_2=\dfrac{1}{\sqrt{-2}}\omega_2\\y_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\omega_3\end{cases}.\tag{2}$$

便得二次型的规范形

$$f(x_1,x_2,x_3)=\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2.$$

将(2)代入(1)得

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\omega_1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\omega_2+\dfrac{1}{\sqrt{6}}\omega_3\\x_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\omega_1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\omega_2-\dfrac{1}{\sqrt{6}}\omega_3\\x_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\omega_3\end{cases}\tag{3}$$

(3)就是将二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为规范形所用的总的线性代换. 若将(3) 表为 $X=CW$，其中

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},W=\begin{pmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}i & \frac{3}{\sqrt{6}}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}i & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}.$$

又二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&-3\\1&-3&0\end{pmatrix}.$$

则可以验证

$$C'AC=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

例 8　写出下列复二次型的规范形:

(1) $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_3x_4$;

(2) $f(x_1,x_2)=(-1-\mathrm{i})x_1x_2+2\mathrm{i}x_2^2$.

解　(1)该二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

因为秩$(A)=4$,所以$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$的规范形为:$y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2$.

(2)该二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0 & \frac{-1-\mathrm{i}}{2}\\ \frac{-1-\mathrm{i}}{2} & 2\mathrm{i}\end{pmatrix}.$$

因为秩$(A)=2$,所以$f(x_1,x_2)$的规范形为:$y_1^2+y_2^2$.

2. 利用实二次型的规范形

利用实二次型的规范形,可以解答正惯性指数、符号差以及实二次型的值等问题.

例9 求 $2n$ 元实二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{2n}) = x_1x_2 + x_3x_4 + \cdots + x_{2n-1}x_{2n}$ 的规范形,并求其秩及符号差.

解 依次作非退化线性替换

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 + y_4 \\ x_4 = y_3 - y_4 \\ \quad\cdots \\ x_{2n-1} = y_{2n-1} + y_{2n} \\ x_{2n} = y_{2n-1} - y_{2n} \end{cases}, \qquad \begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = y_3 \\ \quad\cdots \\ z_n = y_{2n-1} \\ z_{n+1} = y_2 \\ z_{n+2} = y_4 \\ \quad\cdots \\ z_{2n} = y_{2n} \end{cases},$$

则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{2n}) = y_1^2 - y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 + \cdots + y_{2n-1}^2 - y_{2n}^2 = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2 - z_{n+1}^2 - z_{n+2}^2 - \cdots - z_{2n}^2$ 为规范形. 从而,秩为 $2n$,符号差为 0 .

例10 设 A 是实数域上的 n 阶对称矩阵,试求 A 与 $-A$ 合同的充要条件.

解 设 A 的秩是 r,正惯性指标是 p,那么在实数域上 A 合同于规范形

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

其中有 p 个 1 , $r-p$ 个 -1 ,即存在实数域上可逆矩阵 P 使 $P'AP = D$,由

此可得 $P'(-A)P=-D$. 而

$$-D=\begin{pmatrix}-1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&-1&&&&&&\\&&&1&&&&&\\&&&&\ddots&&&&\\&&&&&1&&&\\&&&&&&0&&\\&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&0\end{pmatrix}.$$

其中有 $r-p$ 个 1, p 个 -1, 可见 $-A$ 的秩是 r, 正惯性指标是 $r-p$, 由此知 A 与 $-A$ 在实数域上合同的充要条件是 $p=r-p$, 即 $2p=r$.

例 11　证明:若 A 为 n 阶实对称矩阵,且 $|A|<0$, 则一定存在实 n 维向量 $X_0\neq 0$ 使 $X'_0AX_0<0$.

证明　　因为 $|A|<0$, 所以, 二次型 $f=X'AX$ 的秩为 n, 且不是正定的, 从而, 有非退化线性替换 $X=CY$, 使 f 化为 $y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_n^2$, $p<n$. 取 $y_{p+1}=1$, 而其余 y_i 均为 0, 则得到相应的 $X_0\neq 0$, 使得 $f=X'_0AX_0=-1<0$.

注　设 f 与 g 是数域 F 上的两个二次型, 如果存在 F 上一个非退化线性代换, 将 f 变为 g, 则称 f 与 g 等价, 如果 A 和 B 分别是二次型 f 和 g 的矩阵, 则 f 与 g 等价的充要条件是 A 与 B 合同, 二次型的等价关系与矩阵的合同关系都具有反身性、对称性、传递性, 因此, 我们可以把二次型按等价关系分类, 凡是等价的二次型属于同一类.

任意一个二次型都等价于一个标准形, 但一个二次型的标准形不是惟一的, 所以不能只靠标准形来解决分类问题, 在复数域和实数域上利用二次型的规范形, 能完善地给出二次型的分类问题.

关于两个二次型等价的充要条件应注意, 在复数域内是它们有相同的秩, 在实数域内是它们有相同的秩和相同的正惯性指数.

8.3.5　正定二次型与正定矩阵

1. 正定二次型的判别

判定实二次型是否正定的常用方法是:(1)化得标准形或规范形,看系数为正的项数是否等于文字的个数;(2)计算二次型的矩阵的各阶顺序主子式,看是否全为正. 一般说来,方法(2)较为简便.

例 12　判定实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$ 是否正定.

解 1　因为, $f(x_1,x_2,x_3)=5(x_1+\frac{2}{5}x_2-\frac{4}{5}x_3)^2+\frac{1}{5}x_2^2-\frac{4}{5}x_2x_3+\frac{9}{5}x_3^2=5(x_1+\frac{2}{5}x_2-\frac{4}{5}x_3)^2+\frac{1}{5}(x_2-2x_3)^2+x_3^2$,所以,作非退化线性替换

$$\begin{cases}y_1=x_1+\frac{2}{5}x_2-\frac{4}{5}x_3\\ y_2=x_2-2x_3\\ y_3=x_3\end{cases}$$

得到 $f(x_1,x_2,x_3)=5y_1^2+\frac{1}{5}y_2^2+y_3^2$. 因此 $f(x_1,x_2,x_3)$ 正定.

解 2　$f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵是 $\begin{pmatrix}5&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&5\end{pmatrix}$, 顺序主子式

$|5|>0,\begin{vmatrix}5&2\\2&1\end{vmatrix}>0,\begin{vmatrix}5&2&-4\\2&1&-2\\-4&-2&5\end{vmatrix}>0$,所以 $f(x_1,x_2,x_3)$ 正定.

例 13　求 λ 的值,使实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\lambda(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2-2x_2x_3+2x_3x_1+x_4^2$ 是正定的.

解　二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}\lambda&1&1&0\\1&\lambda&-1&0\\1&-1&\lambda&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

当顺序主子式

$$|\lambda|>0,\begin{vmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{vmatrix}>0,\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & -1\\ 1 & -1 & \lambda\end{vmatrix}>0,|A|>0$$

时,二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$正定.由此得

$$\begin{cases}\lambda>0\\ \lambda^2-1>0\\ \lambda(1+\lambda)(\lambda-\dfrac{2}{\lambda}-1)>0\end{cases},$$

解这个不等式组得$\lambda>2$.因此,当$\lambda>2$时,二次型$f(x_1,x_2,x_3,x_4)$是正定的.

例 14　判别二次型$10x_1^2+8x_1x_2+24x_1x_3+2x_2^2-28x_2x_3+x_3^2$是否正定.

解　$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}10 & 4 & 12\\ 4 & 2 & -14\\ 12 & -14 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}.$$

因为$|A|=-2908<0$,故二次型f非正定.

2. 正定与半正定的证明

关于实二次型或实对称矩阵正定与半正定方面的题目,可以考虑下列几种处理方法:(1)用定义证明;(2)用规范形证明;(3)用顺序主子式证明;(4)用矩阵合同证明;(5)用特征值来证明.

例 15　证明:实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2$是半正定的.

证明　因为$(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i^2+x_j^2)$,所以,对任意实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$而言,有

$$\begin{aligned}f&=n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-(\sum_{i=1}^{n}x_i)^2\\ &=(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}2x_ix_j\end{aligned}$$

$$= \sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i^2+x_j^2) - \sum_{1\leq i<j\leq n}2x_ix_j$$
$$= \sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i^2+x_j^2-2x_ix_j)$$
$$= \sum_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)^2 \geq 0.$$

因此,f为半正定的.

例 16　证明实二次型f半正定的必要充分条件是其正惯性指数p与秩r相等.

证明　先证必要性. 用反证法. 若$p<r$,则$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$经非退化线性替换$X=CY$化为$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$,取$y_{p+1}=1$,而其余的$y_i$均为0,则得到相应的一组不全为0的$x_1,x_2,\cdots,x_n$的值,使$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=-1<0$,引出矛盾. 因此,$p=r$.

再证充分性. 若$p=r$,则经非退化线性替换$X=CY$,$f=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2$. 对任意一组不全为0的实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$,由$Y=C^{-1}X$得一组不全为0的实数$y_1,y_2,\cdots,y_n$,从而就有$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2\geq 0$,因此$f$半正定.

例 17　设A,B分别是m阶、n阶正定矩阵,证明$C=\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}$是正定矩阵.

证明　**方法 1**　设A的各阶顺序主子式为$\Delta_1,\Delta_2,\cdots,\Delta_{m-1},\Delta_m=|A|$,而$B$的各阶顺序主子式为$\overline{\Delta}_1,\overline{\Delta}_2,\cdots,\overline{\Delta}_{n-1},\overline{\Delta}_n=|B|$. 由$A$,$B$正定知$\Delta_i>0,\overline{\Delta}_j>0$. 由于$C$的各阶顺序主子式$\widetilde{\Delta}_i(i=1,2,\cdots,m+n)$满足

$$\widetilde{\Delta}_1=\Delta_1>0,\cdots,\widetilde{\Delta}_m=\Delta_m>0,$$
$$\widetilde{\Delta}_{m+1}=|A|\overline{\Delta}_1>0,\cdots,\widetilde{\Delta}_{m+n}=|A|\overline{\Delta}_n>0.$$

故C为正定矩阵.

方法 2　由A,B是正定矩阵知,存在m阶可逆矩阵P和n阶可逆矩阵Q,使得$P'AP=I_m,Q'BQ=I_n$. 令$M=\begin{pmatrix}P & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}$,则$M$是$m+n$阶可

逆矩阵,且

$$M'CM=\begin{pmatrix}P' & 0\\ 0 & Q'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P & 0\\ 0 & Q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P'AP & 0\\ 0 & Q'BQ\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_m & 0\\ 0 & I_n\end{pmatrix}=I_{m+n},$$

故 C 是正定矩阵.

方法 3　设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$, B 的特征值为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$, 则由 $|C-\lambda I_{m+n}|=\begin{vmatrix}A-\lambda I_m & 0\\ 0 & B-\lambda I_n\end{vmatrix}=|A-\lambda I_m||B-\lambda I_n|=0$ 知 C 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m,\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$. 由于 A,B 均为正定矩阵,从而 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,m)$, $\mu_j>0(j=1,2,\cdots,n)$, 即 C 的特征值全大于零,故 C 为正定矩阵.

8.4　练习题及答案

8.4.1　练习题

1. 设 σ 是 F 上 n 维向量空间 V 的一个线性变换.

(1)定义

$$g(\alpha)=f(\sigma(\alpha)),\forall\alpha\in V,f\in V^*.$$

证明: $g\in V^*$, 并记 $g=f\sigma$.

(2)定义 V^* 的一个变换

$$\sigma^*(f)=f\sigma=g,\forall f\in V^*,\sigma\in L(V).$$

证明: $\sigma^*\in L(V^*)$.

2. 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$ 的标准形.

3. 设有对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -3\\ 1 & -3 & 0\end{pmatrix}$, 试求可逆矩阵 C, 使 $C'AC$ 为对角形矩阵.

4. 求二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$ 的标准形.

5. (Ⅰ)用非退化线性替换化下面二次型为标准形,并利用矩阵验算所得结果:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_4.$$

（Ⅱ）把上述二次型进一步化为规范形，分实系数、复系数两种情况；并写出所作的非退化线性替换.

6. 写出复二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$的规范形.

7. 设A是实数域上的对称矩阵. $|A|<0$，求证有实数域上1行n列矩阵$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$使$\alpha'A\alpha<0$.

8. 求证：在有理数域上，$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$不合同.

9. 证明：秩等于r的对称矩阵可以表成r个秩等于1的对称矩阵之和.

10. 如果把实n阶对称矩阵按合同分类，即两个实n阶对称矩阵属于同一类当且仅当它们合同，问共有几类？

11. 证明：设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$是一个实二次型. 若有实$n$维向量$X_1,X_2$，使$X'_1AX_1>0,X'_2AX_2<0$，则一定有实$n$维向量$X_0\neq 0$，使$X'_0AX_0=0$.

12. t取什么值时，实二次型$x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_2+4x_2x_3$是正定的.

13. 判别二次型$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$是否正定.

14. 设A是n阶实对称矩阵，求证A半正定的充要条件是：对任意$\mu>0$，$\mu I+A$正定.

15. 设A,B为正定矩阵，求证$A^{-1},A+B,kA(k>0)$也是正定矩阵.

16. 设A是实对称矩阵. 证明：当实数t充分大之后，$tI+A$是正定矩阵.

17. 实二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$是满秩的. 证明：$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$可用正交坐标变换化为规范形的充分必要条件是$A$为正交矩阵.

18. 设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$为实二次型，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$为$A$的特征根，且$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$. 证明：对任意$X\in R^n$，都有$\lambda_1X'X\leqslant X'AX\leqslant\lambda_nX'X$.

19. A是一个实矩阵. 证明$\operatorname{rank}(A'A)=\operatorname{rank}A$.

20. 正定矩阵 A 是正交矩阵的充要条件是 A 是单位矩阵.

8.4.2　练习题答案

1. (1) $\forall \alpha \in V$,由定义的 g 惟一确定一个数 $f(\sigma(\alpha))$,使 α 与之相对应,即

$$g(\alpha) = f(\sigma(\alpha)).$$

为 V 到 F 上的一个映射,并且 $\forall \alpha,\beta \in V, \forall k_1,k_2 \in F$,有

$$\begin{aligned} g(k_1\alpha + k_2\beta) &= f(\sigma(k_1\alpha + k_2\beta)). \\ &= f(k_1\sigma(\alpha) + k_2\sigma(\beta)). \\ &= k_1f(\sigma(\alpha)) + k_2f(\sigma(\beta)). \\ &= k_1g(\alpha) + k_2g(\beta). \end{aligned}$$

故 $g \in V^*$.

(2)对任意取定 V 上一个线性函数 h,由(1)之结论,h 确定 V 上一个线性函数

$$g(\alpha) = h(\sigma(\alpha)), \forall \alpha \in V, h \in V^*.$$

于是规定

$$\sigma^*: h \to g, \forall h \in V^*,$$

则 σ^* 是 V^* 的一个变换,并且 $\forall h_1,h_2 \in V^*, \forall k_1,k_2 \in F, \forall \alpha \in V$ 都有

$$\sigma^*(k_1h_1 + k_2h_2)(\alpha) = (k_1h_1 + k_2h_2)(\sigma(\alpha)).$$

$$= k_1h_1(\sigma(\alpha)) + k_2h_2(\sigma(\alpha)) = k_1\sigma^*(h_1(\alpha)) + k_2\sigma^*(h_2(\alpha)).$$

$$= (k_1\sigma^*(h_1) + k_2\sigma^*(h_2))(\alpha),$$

故 $\sigma^*(k_1h_1 + k_2h_2) = k_1\sigma^*(h_1) + k_2\sigma^*(h_2)$. 因此 σ^* 是 V^* 的一个线性变换,即 $\sigma^* \in L(V^*)$.

2. 作非退化线性替换

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 \\ x_2 = z_1 - z_2, \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

则 $f(x_1,x_2,x_3) = 2(z_1 + z_2)(z_1 - z_2) - 6(z_1 - z_2)z_3 + 2(z_1 + z_2)z_3$

$$= 2z_1^2 - 2z_2^2 - 4z_1z_3 + 8z_2z_3 = 2(z_1 - z_3)^2 - 2z_2^2 - 2z_3^2 + 8z_2z_3,$$

作非退化线性替换

$$\begin{cases} y_1 = z_1 - z_3 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \end{cases}, \qquad 即\begin{cases} z_1 = y_1 + y_3 \\ z_2 = y_2 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$$

则 $f(x_1,x_2,x_3) = 2y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2 + 8y_2y_3 = 2y_1^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2$.
作非退化线性替换

$$\begin{cases} \omega_1 = y_1 \\ \omega_2 = y_2 - 2y_3, \\ \omega_3 = y_3 \end{cases} \qquad 即\begin{cases} y_1 = \omega_1 \\ y_2 = \omega_2 + 2\omega_3. \\ y_3 = \omega_3 \end{cases}$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3) = 2\omega_1^2 - 2\omega_2^2 + 6\omega_3^2,$$

即为标准形. 而这三次线性替换的结果相当于一个总的线性替换

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}.$$

3. 作初等变换,从略.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C'AC = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 6 \end{pmatrix}.$$

4. 因为, $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2$, 所以,设

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 + 2x_3, \\ y_3 = x_3 \end{cases} \qquad 即\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + 2y_3 \\ x_2 = y_2 - 2y_3 \\ x_3 = y_3 \end{cases}.$$

则这是一个非退化的线性替换,从而, $f(x_1,x_2,x_3) = y_1^2 + y_2^2$ 为标准形.

5. (Ⅰ) $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$

$$= [x_2^2 + 2x_2(x_1 + x_3) + (x_1 + x_3)^2] - 2x_1x_3 + 2x_3x_4 + x_4^2$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_4)^2 - 2x_1x_3 - x_3^2$$

$$= x_1^2 + (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_3 + x_4)^2 - (x_1 + x_3)^2$$

令
$$\begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_3 = x_3 + x_4 \\ y_4 = x_1 + x_3 \end{cases}. \quad 即\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 - y_4 \\ x_3 = -y_1 + y_4 \\ x_4 = y_1 + y_3 - y_4 \end{cases},$$
则二次型的标准形为 $f = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2$.

变换矩阵为 $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$,验算得 $T'AT = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$.

(Ⅱ)　在(Ⅰ)中二次型的标准形已为实二次型的规范形,令
$$\begin{cases} y_1 = z_1 \\ y_2 = z_2 \\ y_3 = z_3 \\ y_4 = \mathrm{i}z_4 \end{cases},$$
有
$$\begin{cases} x_1 = z_1 \\ x_2 = z_2 - \mathrm{i}z_4 \\ x_3 = -z_1 + \mathrm{i}z_4 \\ x_4 = z_1 + z_3 - \mathrm{i}z_4 \end{cases},$$
则复二次型的规范形为 $f = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2$.

6. 该二次型的矩阵为
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
因为秩$(A) = 2$,所以 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2$.

7. 因为 $|A| \neq 0$,所以秩 $A = n$,又因为正惯性指标不会是 n,否则 A 的规范形是 I,而且存在可逆矩阵 P 使 $A = P'P$, $|A| = |P'||P| = |P|^2$,此与 $|A| < 0$ 矛盾,现设 A 的规范形是:

$$D=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{pmatrix}.$$

其中至少出现一个 -1,而且可逆矩阵 P 使 $P'AP=D$,对 D 来说,$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$,则 $\alpha'_1D\alpha_1=-1<0$,再令 $\alpha=D\alpha_1$,于是可得

$$\alpha'A\alpha=\alpha'_1P'AP\alpha_1=\alpha'_1D\alpha_1<0.$$

8. 用反证法. 如果合同,则存在有理数域上 2 阶可逆矩阵 P 使

$$P'\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},$$

于是

$$\left|P'\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}P\right|=\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}.$$

但 $|P'|=|P|$,所以,$2|P|^2=1$,$|P|=\pm\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,这与 P 是有理数域上的矩阵矛盾.

9. 设 A 是秩为 r 的对称阵,由于对称阵总可合同于一对角阵,即存在可逆阵 C ,使

$$C'AC=D=\begin{pmatrix}d_1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&d_r&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_1&&&&\\&0&&&\\&&0&&\\&&&\ddots&\\&&&&0\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}+\cdots+\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & d_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}=D_1+\cdots+D_r.$$

于是

$$A=(C')^{-1}DC^{-1}=(C')^{-1}[D_1+\cdots+D_r]C^{-1}=(C')^{-1}D_1C^{-1}+\cdots+(C')^{-1}D_rC^{-1}.$$
$$=B_1+\cdots+B_r.$$

其中 $B_i=(C')^{-1}D_iC^{-1}(i=1,2,\cdots,r)$ 是秩为 1 的对称矩阵.

10. 共有 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 类.

这是由于实对称矩阵 A 与 B 合同时,有

$$P'AP=C'BC=\begin{pmatrix} d_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & d_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.\ (d_i\neq 0,i=1,\cdots,r)$$

考虑相应二次型的情形,按 d_i 取值的正负可分为

r 个正,0 个负;$r-1$ 个正,1 个负;…;

1 个正,$r-1$ 个负;0 个正,r 个负,共 $r+1$ 类.

而秩 r 又可分别取 $0,1,2,\cdots,n$,故共有类数为

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

11. 由条件知,二次型是不定的,从而有非退化线性替换 $X=CY$,使 f 化为 $y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$,$0<p<r$. 取 $y_p=y_{p+1}=1$,而其余 y_i 均为0,则得到相应的 $X_0\neq 0$,使得 $f=X'_0AX_0=0^2+\cdots+0^2+1^2-1^2-0^2-\cdots-0^2=0$.

12. 二次型的矩阵的顺序主子式是：$|1|=1$，$\begin{vmatrix}1 & t\\ t & 1\end{vmatrix}=1-t^2$，$|A|=-5t^2-4t$，当且仅当上述主子式都大于零时所给二次型是正定的，即 $1>0$，$1-t^2>0$，$-5t^2-4t>0$，通过解不等式知：$-\frac{4}{5}<t<0$.

13. $$f=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=X'AX.$$

利用《高等代数》(北大 · 第3版)66页例1结果得 A 的 k 阶顺序主子式

$$\Delta_k=\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left(1+\frac{k-1}{2}\right)>0\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

故 f 为正定二次型.

14. 必要性. 只要证明对任意不全为零的 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，有

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)(\mu I+A)\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}>0.$$

因为 A 是半正定的，所以 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)A\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\geqslant 0$，而 $\mu>0$，显然有，

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mu I\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}>0.$$

于是可得所要求的不等式.

充分性. 如果 A 不是半正定的,则存在 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)\neq(0,0,\cdots,0)$ 使

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)A\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}<0.$$

令 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)A\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$ 的绝对值为 b,因为

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)(\mu I+A)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=\mu(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)+(a_1,a_2,\cdots,a_n)A\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix},$$

所以当 $0<\mu_0<\dfrac{b}{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$ 时,有

$$(a_1,a_2,\cdots,a_n)(\mu I+A)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}<0,$$

这与 $\mu I+A$ 是正定的条件矛盾,可见 A 是半正定的.

15. (1)因为 A 是正定矩阵,所以 A 是合同于 I 的实对称矩阵,即存在可逆矩阵 C,使得 $C'AC=I$,且 $A'=A$,两边求逆得 $(C'AC)^{-1}=I^{-1}$,即 $C^{-1}A^{-1}(C')^{-1}=I$. 于是存在可逆矩阵 $P=(C^{-1})'=(C')^{-1}$,使 $P'A^{-1}P=I$. 又因为 $(A^{-1})'=(A')^{-1}$,所以 A^{-1} 也是对称矩阵,从而 A^{-1} 是与 I 合同的实对称矩阵,因而 A^{-1} 也是正定矩阵.

(2)设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX,g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'BX$ 分别是以 A,B 为矩阵的二次型.

因为 A,B 为正定矩阵,所以 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 和 $g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是

正定二次型,即对任意不全为零的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0,g(x_1,x_2,\cdots,x_n)>0$,于是对任意不全为零的 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 恒有

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)+g(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'(A+B)X>0,$$

所以,以 $A+B$ 为矩阵的二次型为正定二次型,因而 $A+B$ 为正定矩阵.

(3)设 $A=(a_{ij})$,因为 A 为正定的,所以 A 的顺序主子式

$$P_t=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1t} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tt} \end{vmatrix}>0,t=1,2,\cdots,n,$$

由于 $kA=(ka_{ij})$ 及 $k>0,P_t>0$,所以 kA 的顺序主子式

$$A_k=\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1t} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{t1} & ka_{t2} & \cdots & ka_{tt} \end{vmatrix}>k^tP_t>0,t=1,2,\cdots,n.$$

所以 kA 也是正定矩阵.

16. 由于实对称阵总可相似于对角矩阵,即存在可逆矩阵 P,使

$$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

其中 λ_i 为实数,那么 $A=P\Lambda P^{-1}$. 易知 $tI+A$ 为实对称阵. 取 $t>\max\limits_i\lambda_i$,则

$$P^{-1}(tI+A)P=tI+P^{-1}AP=tI+\Lambda=\begin{pmatrix} t+\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & t+\lambda_n \end{pmatrix}.$$

矩阵 $tI+A$ 的任意一特征值 $t+\lambda_i>0$,故 $tI+A$ 当 $t>\max\limits_i\lambda_i$ 时为正定矩阵.

17. $\Rightarrow$) 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$ 用正交坐标变换 $X=PY$ 化成规范形 $g(y_1,y_2,\cdots,y_n)=Y'BY$,其中 $B=\mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1)$. 因为 $B=P'AP=P^{-1}AP$,所以 $A=PBP^{-1}$,于是 $A'=A=PBP^{-1}=$

$PB^{-1}P^{-1} = (PBP^{-1})^{-1} = A^{-1}$,故 A 为正交阵.

$\Leftarrow$) 由于 A 是正交阵且为对称阵,因此 $A' = A = A^{-1}$,即 $A^2 = I$. 易知幂等阵 A 的特征值 $\lambda_i = 1$ 或 $-1, i = 1,\cdots,n$,所以存在正交阵 T,使 $T'AT = \mathrm{diag}(1,\cdots,1,-1,\cdots,-1)$,其中正、负 1 的个数分别为 A 的正、负惯性指数,于是令正交坐标变换 $X = TY$,使

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_n^2.$$

18. 由于 A 为实对称阵,则存在正交阵 P,使 $P^{-1}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,其中 $\lambda_i(i = 1,\cdots,n)$ 为 A 的全部特征根. 于是构作正交变换 $X = PY$,使 $X'AX = Y'P'APY = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$. 由题设 $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$,得

$$\lambda_1 Y'Y = \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant X'AX \leqslant \lambda_n \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \lambda_n Y'Y,$$

其中 $Y' = (y_1,y_2,\cdots,y_n)$. 又因 P 为正交阵,有

$$X'X = (PY)'PY = Y'Y,$$

故必有 $\lambda_1 X'X \leqslant X'AX \leqslant \lambda_n X'X$.

19. 设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$,只要证线性方程组 $A'AX = 0$ 与 $AX = 0$ 同解,便可得基础解系含向量个数相等,即 $n - \mathrm{rank}(A'A) = n - \mathrm{rank}A$,从而 $\mathrm{rank}(A'A) = \mathrm{rank}A$.

设 X 是 $A'AX = 0$ 的解,左乘 X' 得 $0 = X'A'AX$ 令 $Y = A\underline{X}, Y'Y = y_1^2 + \cdots + y_m^2$,故 $Y = 0$,即 X 是 $AX = 0$ 的解.

反之,设 X 是 $AX = 0$ 的解,左乘 A' 得 $A'AX = 0$,即 X 是 $A'AX = 0$ 的解,故 $A'AX = 0$ 与 $AX = 0$ 同解.

20. 如果 A 是正定矩阵,那么存在一个正交矩阵 Q,使得 $Q^{-1}AQ = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,其中 $\lambda_i > 0(i = 1,2,\cdots,n)$. 又假如 A 是正交矩阵,由正交矩阵的乘积是正交矩阵,可知 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 是正交矩阵,所以 $\lambda_i = 1(i = 1,2,\cdots,n)$,即 $Q^{-1}AQ = I$,那么 $A = QIQ^{-1} = I$. 于是必要性得证. 而充分性是显然的. 因此该命题成立.

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝高等代数的典型方法
作者＝吴险峰，张世红主编
页数＝２９５
ＳＳ号＝１１７２１３１５
出版日期＝２００６年０７月